Das Rückstrahldiagramm einer mit einer reflexionsmindernden Schichtung ummantelten unendlich leitenden Kugel

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von
Dieter Glesner
aus Saarlouis/Roden

Saarbrücken 1968

1969

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41542713_0029

Das Rückstrahldiagramm einer mit einer reflexionsmindernden Schichtung ummantelten unendlich leitenden Kugel

Inaugural-Dissertation
zur Erlangung des akademischen Grades eines
Doktors der Naturwissenschaften
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Universität des Saarlandes

vorgelegt von
Dieter Glesner
aus Saarlouis/Roden

Saarbrücken 1968

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Tag der mündlichen Prüfung: 3. Februar 1969
Der Dekan: Prof.Dr. H.D. Dietze
Berichterstatter: Prof.Dr. G. Eckart
Prof.Dr. A.W. Maue

Inhaltsverzeichnis:

		Seite
1.	Einleitung	1
2.	Problemstellung	2
3.	Reihendarstellung für die Potentiale	4
4.	Strahlenoptische Herleitung des Reflexionsfaktors	13
4.1.	Sphärische Fresnelsche Koeffizienten	14
4.2.	Reflexionsfaktor einer einfach geschichteten Kugel	17
4.3.	Reflexionsfaktor einer zweifach geschichteten Kugel	19
4.4.	Reflexionsfaktor einer n-fach geschichteten Kugel	2o
5.	Spezialisierung der Schichten	21
6.	Integraldarstellung der Potentiale und Residuenreihen	23
7.	Asymptotisches Verhalten der Hankelfunktionen	28
8.	Überblick über die Größenordnungen der Kugelparameter	31
9.	Verhalten des Reflexionsfaktors in der komplexen Ebene	32
9.1.	Reflexionsfaktor links von der Nullstellenkurve	35
9.2.	Pole des Reflexionsfaktors	41
1o.	Grenzfall $k_o r_o \gg 1$, $k_2 \gg k_o$	42
1o.1.	Reflexionsfaktor	42
1o.2.	Folgerungen für Sender und Empfänger $\rightarrow \infty$	44
1o.3.	Pole des Reflexionsfaktors	47
11.	Umformung der Residuenreihen	5o
11.1.	Empfänger im Schattengebiet	52
11.2.	Empfänger im Lichtgebiet	57
11.2.1.	Residuenreihen	58
11.2.2.	Geometrisch-optisches Feld (Sattelpunktmethode)	62
12.	Abschließende Bemerkung	71
13.	Numerische Ergebnisse	73
13.1.	Eigenwertgleichung	74
13.2.	Residuenreihen	79
14.	Literaturverzeichnis	91

1. Einleitung

In der folgenden Arbeit wird der Einfluß (Reflexion und Beugung) einer ummantelten ideal leitenden Kugel auf das Strahlungsfeld eines horizontalen Hertzschen Dipoles untersucht, speziell im Hinblick auf Unterdrückung der Rückstrahlung. Unter einem horizontalen Dipol soll ein Dipol verstanden werden, dessen Moment senkrecht zum Radius der Kugel ausgerichtet ist. Dieser "Schornsteinfeger-Effekt", wie er in der deutschen Literatur häufig bezeichnet wird, ist seit dem Aufkommen des Radars mit mehr oder weniger Erfolg angewandt worden zum Zwecke der Tarnung. Bisher fehlt jedoch eine strenge mathematische Behandlung dieses Problems.

Es kommen hier im wesentlichen die Theorien von v a n d e r P o l [3], [4], [17], [18], [20], [21], und B r e m m e r über die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen über kugelförmiger Erde zur Anwendung. (Der Formelapparat bleibt gleich, ob es sich um Wellenausbreitung über der Erde oder um Beugung an einer kleineren Kugel handelt, da in beiden Fällen die Wellenlänge als klein gegenüber dem Radius der beugenden Kugel angenommen wird.) Zunächst werden aus den Maxwellschen Gleichungen Reihendarstellungen über Bessel- bzw. Hankel-Funktionen für die Potentiale des horizontalen Hertzschen Dipoles hergeleitet. Da diese Reihen schlecht konvergieren, wenn der Kugelradius größer als die Wellenlänge wird (was bei Radar im allgemeinen der Fall ist), werden sie in Linienintegrale umgewandelt, die nach der Residuentheorie und der Sattelpunktsmethode ausgewertet werden. Die Sattelpunktsmethode liefert das geometrisch-optische Feld, während die Auswertung nach der Residuentheorie ergänzend die von F r a n z [11], [12], [13] eingeführten auf W a t s o n zurückgehenden Kriechwellen liefert.

Als einfallende Welle wird das Feld eines horizontalen Hertzschen Dipoles benutzt und nicht eine ebene Welle. Dadurch vergrößert sich zwar der Formelaufwand, jedoch läßt sich die Watson-Transformation in einfacher Weise durchführen.

2. Problemstellung

Eine auf eine unendlich ausgedehnte, unendlich gut leitende Wand auftreffende Welle wird vollständig reflektiert. Es ist jedoch möglich, die Reflexion für eine bestimmte Einfallsrichtung und eine monochromatische ebene Welle ganz zu unterdrücken, wenn man die Wand mit einem System von unendlich ausgedehnten Schichten bedeckt, deren Dicken und Ausbreitungskonstanten gewissen Bedingungen genügen. In Abschnitt 5 sind diese Bedingungen für 2 Schichten und senkrechten Einfall hergeleitet.

Bringt man in das Strahlungsfeld eines Dipols eine ideal leitende Kugel, so mißt man in Rückwärtsrichtung (= Richtung zum sendenden Dipol) ein elektromagnetisches Feld, das von Reflexion und Beugung an der Kugel herrührt und von dem Verhältnis Kugelradius/Wellenlänge abhängt. Ummantelt man die Kugel mit 2 konzentrischen Schichten, die die Eigenschaft haben, auf eine Ebene aufgebracht, die auftreffende Welle für senkrechten Einfall auszulöschen, so wird man eine Unterdrückung oder wenigstens eine Verminderung des Feldes in Rückwärtsrichtung erwarten können.

Ziel dieser Arbeit ist es, das Rückstrahldiagramm einer auf diese Weise ummantelten Kugel zu bestimmen. Wir können also in folgender Art das gestellte Problem formulieren:
Gegeben sei eine konzentrisch geschichtete Kugel mit dem äußeren Radius r_o, deren Mittelpunkt mit dem Ursprung eines kartesischen Koordinatensystems (x,y,z) zusammenfällt. Im Punkt D (0,0,b) mit $b > r_o$ befinde sich ein mit der Kreisfrequenz ω strahlender Hertzscher Dipol, dessen Moment in Richtung der x-Achse gelegen ist. Der Dipol liege deswegen in x-Richtung, damit für $b \to \infty$ eine ebene Wellenfront auf die Kugel auftreffe, wie es die Anwendung in der Radartechnik erfordert. Der Kugelkern mit dem Radius r_2 sei unendlich gut leitend. Über diesem Kern seien zwei Schichten mit den Dicken d_1 und d_2 ($r_2 + d_1 + d_2 = r_o$) und den Materialkonstanten ε_1, μ_1, σ_1, und ε_2, μ_2, σ_2 aufgetragen, derart, daß für $b \to \infty$ (Grenzfall der ebenen Welle) und $r_o \to \infty$ (Grenzfall der ebenen Schichtung) eine senkrecht auffallende ebene Welle ausgelöscht wird.

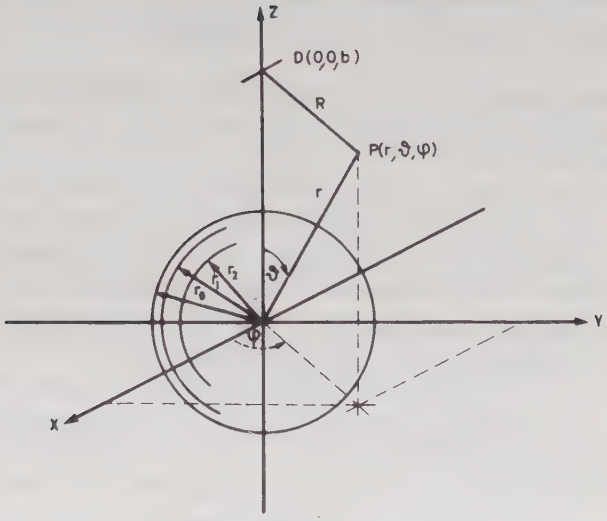


Abb. 1 Lage des Dipols bezüglich der Kugel und deren Schichtung.

Das durch den Dipol erzeugte Feld genüge sowohl außerhalb der Kugel als auch in den einzelnen Kugelschalen den Maxwellschen Gleichungen (als Zeitabhängigkeit ist $\exp(-i\,\omega\,t)$ gewählt).

$$\text{rot}\ \vec{E}^{(k)} = i\,\omega\,\mu_k\,\vec{H}^{(k)} \qquad (2.1)$$

$$\text{rot}\ \vec{H}^{(k)} = (\sigma_k - i\,\omega\,\varepsilon_k)\vec{E}^{(k)} \qquad k = 0,1,2 \qquad (2.2)$$

Durch die Trennfläche der einzelnen Kugelschalen sollen die Tangentialkomponenten von $\vec{E}$ und $\vec{H}$ stetig hindurchgehen.

$$\left[\vec{e}\,\vec{E}^{(k)}\right],\ \left[\vec{e}\,\vec{H}^{(k)}\right] \quad \text{stetig bei} \quad r = r_0,\ r_1 \qquad (2.3)$$

($\vec{e}$ = Einheitsvektor in Richtung der äußeren Normalen der Oberfläche) Auf dem ideal leitenden Kugelkern soll die Tangentialkomponente von $\vec{E}$ verschwinden.

$$\left[\vec{e}\ \vec{E}\right] = 0 \quad \text{bei} \quad r = r_2 \qquad (2.4)$$

Außerhalb der Kugel besitze das Feld in D eine Singularität, die der eines Einheitsdipoles entspricht. Für $r \to \infty$ genüge das Feld der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung.

Im folgenden werden oft die Wellenzahl k und der Brechungsindex n benutzt, die mit den Materialkonstanten ε, μ, σ durch die Gleichungen

$$k^2 = \omega^2 \varepsilon \mu + i \omega \mu \sigma = k_o^2 n^2 \tag{2.5}$$

$$n^2 = \frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon_o \mu_o} \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right) \tag{2.6}$$

verknüpft sind. Dabei ist $k_o^2 = \omega^2 \varepsilon_o \mu_o = (2\pi / \lambda_o)^2$ die Wellenzahl des Vakuums, λ_o die Vakuumwellenlänge und

$$\varepsilon_o = \frac{1}{4\pi \cdot 9 \cdot 10^9} \left[\text{Asec/Vm}\right], \quad \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \left[\text{Vsec/Am}\right] \tag{2.7}$$

3. Reihendarstellung für die Potentiale

Das Feld eines elektrischen Dipols läßt sich in der Form

$$\vec{E} = \text{rot rot}\vec{\Pi} \qquad Z_o \vec{H} = -ik_o \,\text{rot}\vec{\Pi} \tag{3.1}$$

beschreiben, wobei der Hertzsche Vektor $\vec{\Pi}$ in Richtung des Dipolmomentes liegt. Sein Betrag ist proportional zu

$$\Pi_o = \frac{\exp(ik_o R)}{ik_o R} \tag{3.2}$$

mit $$R^2 = b^2 + r^2 - 2rb \cdot \cos\vartheta \tag{3.3}$$

Die Bedeutung von R, b, r und ϑ gehen aus Abb. 1 hervor. In unserem Fall ist der Dipol längs der x-Achse ausgerichtet. Es ist also in kartesischen Koordinaten:

$$\Pi_x = \Pi_o, \quad \Pi_y = \Pi_z = o \tag{3.4}$$

und daher in Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ):

$$\left.\begin{aligned} \Pi_r &= \Pi_o \cos\varphi \sin\vartheta \\ \Pi_\vartheta &= \Pi_o \cos\varphi \cos\vartheta \\ \Pi_\varphi &= \Pi_o \sin\varphi \end{aligned}\right\} \qquad (3.5)$$

Wir berechnen aus (3.1) zunächst nur die Radialkomponenten der elektrischen und magnetischen Feldstärke, die wir über (3.2) in Form von Reihenentwicklung (3.17) und (3.2o) darstellen. Die übrigen Feldkomponenten finden wir, indem wir das Gesamtfeld aus zwei Teilfeldern aufbauen, von denen das eine nur eine radiale elektrische und das andere nur eine radiale magnetische Komponente hat (3.23 bis 3.28). Die beiden Teilfelder lassen sich aus je einem skalaren Potential (Debeyesche Potentiale), für die wir eine Reihenentwicklung mit noch zu bestimmenden Koeffizienten suchen, durch Differentiation ableiten. Die Koeffizienten bestimmen wir so, daß wir die Reihenentwicklungen der Radialkomponenten der Teilfelder mit den Reihenentwicklungen (3.17) und (3.2o) vergleichen.

Die Berechnung des Feldes eines horizontalen Dipols ist damit auf die mathematisch einfachere Berechnung des Feldes eines vertikalen elektrischen und horizontalen magnetischen Dipols zurückgeführt.

Die durch (3.1) festgelegten Differentiationsvorschriften ergeben in Kugelkoordinaten unter Berücksichtigung von (3.5) für die r-Komponenten des elektrischen und magnetischen Feldes:

$$E_r = \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\cos\varphi\frac{\partial\Pi_o}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{r}\frac{\partial\Pi_o}{\partial\vartheta}\right) - \frac{\cos\varphi}{r}\left(\sin\vartheta\frac{\partial\Pi_o}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r}\frac{\partial\Pi_o}{\partial\vartheta}\right) \qquad (3.6)$$

$$Z_o H_r = \frac{ik_o}{r}\sin\varphi\frac{\partial\Pi_o}{\partial\vartheta} \qquad (3.7)$$

Die Klammerausdrücke in (3.6) lassen sich wie folgt vereinfachen: Da Π_o von r, b, und ϑ über R abhängt, kann man schreiben:

$$\frac{\partial\Pi_o}{\partial r} = \frac{\partial\Pi_o}{\partial b}\cdot\frac{\partial b}{\partial r} = \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial b}}\cdot\frac{\partial R}{\partial r}\cdot\frac{\partial\Pi_o}{\partial b} \qquad (3.8)$$

und

$$\frac{\partial \Pi_o}{\partial \vartheta} = \frac{\partial \Pi_o}{\partial b} \cdot \frac{\partial b}{\partial \vartheta} = \frac{1}{\frac{\partial R}{\partial b}} \cdot \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \cdot \frac{\partial \Pi_o}{\partial b} \tag{3.9}$$

Die weitere Durchrechnung ergibt für die Klammerausdrücke:

$$\cos\vartheta \cdot \frac{\partial \Pi_o}{\partial r} - \frac{\sin\vartheta}{\partial r} \frac{\partial \Pi_o}{\partial \vartheta} = -\frac{\partial \Pi_o}{\partial b} \tag{3.10}$$

$$\sin\vartheta \cdot \frac{\partial \Pi_o}{\partial r} + \frac{\cos\vartheta}{r} \frac{\partial \Pi_o}{\partial \vartheta} = \frac{1}{b} \cdot \frac{\partial \Pi_o}{\partial \vartheta} \tag{3.11}$$

Damit erhalten wir schließlich:

$$E_r = -\frac{\cos\varphi}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial \Pi_o}{\partial b} + \frac{\Pi_o}{b} \right) \tag{3.12}$$

Nun gilt nach dem Additionstheorem der Kugelfunktionen für (3.2) folgende Entwicklung:

$$\frac{e^{ik_o R}}{ik_o R} = \sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)\, \zeta_n^1(k_o b)\, \psi_n(k_o r) P_n(\cos\vartheta) \tag{3.13}$$

Diese Entwicklung gilt zwar nur für $r < b$, d.h. Empfängerentfernung kleiner als Senderentfernung. Wir werden aber später, bei der Berechnung des Rückstrahldiagrammes, r und b sehr groß wählen und so zum Streuanteil des Fernfeldes übergehen. Dies entspricht auch mehr der an Radar-Problemen orientierten Aufgabenstellung. Es entfällt daher hier die in der Wellenausbreitung um kugelförmige Erde übliche Unterscheidung $r < b$ oder $r > b$.

In der Entwicklung (3.13) sind $\psi_n(\rho)$ und $\zeta_n^{1,2}(\rho)$ die sphärischen Bessel- bzw. Hankelfunktionen in der Sommerfeldschen Schreibweise:

$$\psi_n(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, J_{n+1/2}(\rho) \tag{3.14}$$

$$\zeta_n^{1,2}(\rho) = \sqrt{\frac{\pi}{2\rho}}\, H_{n+1/2}^{1,2}(\rho) \tag{3.15}$$

wobei $J_{n+1/2}(\rho)$ und $H^{1,2}_{n+1/2}(\rho)$ die Bessel- bzw. Hankelfunktionen vom halbzahligen Index n+1/2, n = o,1,2,... sind. Die $P_n(\cos\vartheta)$ sind die Legendreschen Polynome oder Kugelfunktionen erster Art.

Die Gleichungen (3.7) und (3.13) ergeben mit der Beziehung

$$P^1_n(\cos\vartheta) = -\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta) \tag{3.16}$$

($P^m_n(\cos\vartheta)$ = zugeordnete Kugelfunktionen erster Art) unmittelbar folgende Reihendarstellung für $Z_o H_r$:

$$Z_o H_r = -\frac{ik_o}{r} \sin\varphi \sum_{n=o}^{\infty} (2n+1)\, \zeta^1_n(k_o b)\, \psi_n(k_o r) P^1_n(\cos\vartheta) \tag{3.17}$$

Zur Bestimmung der Reihendarstellung für E_r schreiben wir:

$$\frac{\partial}{\partial b} = k_o \frac{\partial}{\partial(k_o b)} \tag{3.18}$$

Weiterhin benutzen wir die Abkürzung

$$Z^1_n(k_o b) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\partial(k_o b)}\left[k_o b\, \zeta^1_n(k_o b)\right] = \zeta^1_n(k_o b) + k_o b \frac{\partial}{\partial(k_o b)} \zeta^1_n(k_o b) \tag{3.19}$$

Wir erhalten:

$$E_r = \frac{\cos\varphi}{rb} \sum_{n=o}^{\infty} (2n+1) Z^1_n(k_o b)\, \psi_n(k_o r) P^1_n(\cos\vartheta) \tag{3.20}$$

Andererseits läßt sich nach B r o m w i c h [5] in gewissen Koordinatensystemen, zu denen auch das Kugelkoordinatensystem gehört, ein beliebiges elektromagnetisches Feld aus zwei Teilfeldern aufbauen, von denen eines ein transversal-elektrisches (TE-) Feld und das andere ein transversal-magnetisches (TM-) Feld ist. Das TE-Feld leitet sich aus einem radialen Hertzschen Dipol $\vec{\Pi}^e$ her, während sich das TM-Feld aus einem radialen Fitzgeraldschen Dipol $\vec{\Pi}^m$ herleitet.

$$\vec{E} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \vec{\Pi}^e + ik_o \mathrm{rot}\, \vec{\Pi}^m \tag{3.21}$$

$$Z_o \vec{H} = \mathrm{rot}\ \mathrm{rot}\ \vec{\Pi}^m - ik_o \mathrm{rot}\, \vec{\Pi}^e \tag{3.22}$$

Unter Einführung der Debeyeschen Potentiale $u = r\Pi_r^e$ und $v = r\Pi_r^m$ die wie $\vec{\Pi}^e$ und $\vec{\Pi}^m$ einer Wellengleichung genügen, erhält man aus (3.21) und (3.22) für die Feldkomponenten:

$$E_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) + k_o^2 ru \tag{3.23}$$

$$E_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \vartheta} + \frac{ik_o}{\sin\vartheta}\frac{\partial v}{\partial \varphi} \tag{3.24}$$

$$E_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(ru)}{\partial r \partial \varphi} - ik_o\frac{\partial v}{\partial \vartheta} \tag{3.25}$$

$$Z_o H_r = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rv) + k_o^2 rv \tag{3.26}$$

$$Z_o H_\vartheta = \frac{1}{r}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r \partial \vartheta} - \frac{ik_o}{\sin\vartheta}\frac{\partial u}{\partial \varphi} \tag{3.27}$$

$$Z_o H_\varphi = \frac{1}{r\sin\vartheta}\frac{\partial^2(rv)}{\partial r \partial \varphi} + ik_o\frac{\partial u}{\partial \vartheta} \tag{3.28}$$

Wir berechnen nun die Potentiale so, daß wir für sie einen Reihenansatz machen, mit diesem Reihenansatz in (3.23) und (3.26) eingehen und mit Hilfe von (3.17) und (3.2o) einen Koeffizientenvergleich durchführen. Zunächst folgt aus (3.2o) und (3.23) bzw. (3.17) und (3.26):

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} + k_o^2 ru = \frac{\cos\varphi}{rb}\sum_{n=o}^{\infty}(2n+1)Z_n^1(k_o b)\psi_n(k_o r)P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.29}$$

$$\frac{\partial^2(rv)}{\partial r^2} + k_o^2 rv = -ik_o\sin\varphi\sum_{n=o}^{\infty}(2n+1)\zeta_n^1(k_o b)\psi_n(k_o r)P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.3o}$$

Für die Potentiale u und v machen wir folgenden Ansatz:

$$\left.\begin{aligned} u &= \cos\varphi \\ v &= \sin\varphi \end{aligned}\right\} \sum_{n=o}^{\infty}\binom{a_n}{b_n}\psi_n(k_o r)P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.31}$$

Dieser Ansatz ist berechtigt, da u und v der Wellengleichung

$$(\Delta + k_o^2)\begin{matrix} u \\ v \end{matrix} = o \tag{3.32}$$

genügen. Denn es gilt in Kugelkoordinaten die Aufspaltung:

$$\left.\begin{aligned} \Delta\circ &= \frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\circ) + \frac{1}{r^2}\Delta^* \\ \text{mit}\qquad \Delta^* &= \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial}{\partial\vartheta}\circ\right) + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi 2}\circ \end{aligned}\right\} \tag{3.33}$$

Die Separation der Wellengleichung liefert mit $u(r, \vartheta, \varphi) = F(r)Y(\vartheta, \varphi)$ die Differentialgleichung

$$\left\{\left(\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\circ) + \frac{1}{r^2}\Delta^* + k_o^2 \circ\right)\right\}F(r)\circ Y(\vartheta, \varphi) = o \qquad (3.34)$$

die einerseits in die radiale Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2}{\partial r^2}(r\circ F(r)) + K_o^2 F(r) - \frac{n(n+1)}{r^2}F(r) = o\,, \qquad (3.35)$$

andererseits in die Gleichung der Kugelflächenfunktionen

$$\Delta^* Y(\vartheta, \varphi) = -n(n+1)Y(\vartheta, \varphi) \qquad (3.36)$$

mit $n(n+1)$ als Separationsparameter zerfällt. Die radiale Gleichung hat die sphärischen Zylinderfunktionen (3.14) und (3.15) als Lösung. Somit ist der Ansatz (3.31) gerechtfertigt.

Wir führen nun den Koeffizientenvergleich durch:

$$\begin{Bmatrix} a_n \\ b_n \end{Bmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} r\,\psi_n(k_o r) + k_o^2 r\,\psi_n(k_o r)\right) = \begin{Bmatrix} \frac{Z_n^1(k_o b)}{b} \\ -ik_o\,\zeta_n^1(k_o b) \end{Bmatrix}\frac{2n+1}{r}\psi_n(k_o r) \qquad (3.37)$$

Wegen (3.35) können wir für den linken Ausdruck $\frac{n(n+1)}{r}\psi_n$ schreiben. Wir erhalten also:

$$a_n = \frac{1}{b}\frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b) \qquad (3.38)$$

$$b_n = -ik_o \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n^1(k_o b) \qquad (3.39)$$

Es ist also:

$$u = \frac{\cos\varphi}{b}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b)\,\psi_n(k_o r)P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (3.40)$$

$$v = -ik_o \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{n(n+1)}\,\zeta_n^1(k_o b)\,\psi_n(k_o r)P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (3.41)$$

Diese beiden Gleichungen beschreiben das reine Dipolfeld. Durch die Anwesenheit der beugenden bzw. reflektierenden Kugel wird

dieses Feld derart gestört, daß sich dem Dipolfeld ein weiteres Feld überlagert, das den Charakter einer auslaufenden Welle hat. Die Debeyeschen Potentiale für das Gesamtfeld setzen wir demnach in folgender Form an und zwar für $b \geq r \geq r_o$:

$$u^o_{ges} = \frac{\cos\varphi}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b)\left(\psi_n(k_o r) + A_n^e\, \zeta_n^1(k_o r)\right) P_n^1(\cos\vartheta)$$
$$v^o_{ges} = -ik_o \sin\varphi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n^1(k_o b)\left(\psi_n(k_o r) + A_n^m \zeta_n^1(k_o r)\right) P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (3.42)$$

Nun wird die für Zylinderfunktionen geltende Beziehung

$$\psi_n(\rho) = \frac{1}{2}\left(\zeta_n^1(\rho) + \zeta_n^2(\rho)\right) \qquad (3.43)$$

benutzt. Wir erhalten dann:

$$\psi_n(k_o r) + A_n^{e,m}\, \zeta_n^1(k_o r) = \frac{1}{2}\left(\zeta_n^2(k_o r) + (2A_n^{e,m}+1)\, \zeta_n^1(k_o r)\right)$$

$2A_n^{e,m}+1$ wird nun durch $R_n^{e,m}$ ersetzt. Damit folgt:

$$u^o_{ges} = \frac{\cos\varphi}{2b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b)\left(\zeta_n^2(k_o r) + R_n^e\, \zeta_n^1(k_o r)\right) P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (3.44)$$

$$v^o_{ges} = -\frac{ik_o \sin\varphi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n^1(k_o b)\left(\zeta_n^2(k_o r) + R_n^m\, \zeta_n^1(k_o r)\right) P_n^1(\cos\vartheta) \qquad (3.45)$$

Es ist so eine Aufspaltung des Gesamtfeldes in ein auslaufendes ($\sim \zeta_n^1(k_o r)$) und ein einlaufendes ($\sim \zeta_n^2(k_o r)$) Teilfeld durchgeführt worden. Die $R_n^{e,m}$ sind, wie später gezeigt wird, die sphärischen Fresnelschen Reflexionskoeffizienten für eine TE- bzw. TM-Welle.

Für die Feldkomponenten (3.23) bis (3.28) ergeben sich symmetrische Beziehungen, wenn man folgende Hilfspotentiale einführt:

$$\left.\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{r\cos\varphi} \frac{\partial}{\partial r}\left(r u^o_{ges}\right) \\ V^m &= \frac{ik_o}{\sin\varphi}\, v^o_{ges} \\ V^e &= \frac{ik_o}{\cos\varphi}\, u^o_{ges} \\ U^m &= \frac{1}{r\sin\varphi} \frac{\partial}{\partial r}\left(r V^o_{ges}\right) \end{aligned}\right\} \qquad (3.46)$$

oder ausführlich:

$$U^e = \frac{1}{2rb}\sum \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b)\left\{Z_n^2(k_o r)+R_n^e Z_n^1(k_o r)\right\} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.47}$$

$$V^m = \frac{k_o^2}{2}\sum \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n^1(k_o b)\left\{ \zeta_n^2(k_o r)+R_n^m \zeta_n^1(k_o r)\right\} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.48}$$

$$U^m = -\frac{ik_o}{2r}\sum \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n^1(k_o b)\left\{ Z_n^2(k_o r)+R_n^m Z_n^1(k_o r)\right\} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.49}$$

$$V^e = \frac{ik_o}{2b}\sum \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b)\left\{ \zeta_n^2(k_o r)+R_n^e \zeta_n^1(k_o r)\right\} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.50}$$

Damit erhalten die Feldkomponenten folgendes Aussehen:

$$E_\vartheta = \cos\varphi \left(\frac{\partial U^e}{\partial \vartheta} + \frac{V^m}{\sin\vartheta}\right) \tag{3.51}$$

$$-E_\varphi = \sin\varphi \left(\frac{U^e}{\sin\vartheta} + \frac{\partial V^m}{\partial \vartheta}\right) \tag{3.52}$$

$$Z_o H_\vartheta = \sin\varphi \left(\frac{V^e}{\sin\vartheta} + \frac{\partial U^m}{\partial \vartheta}\right) \tag{3.53}$$

$$Z_o H_\varphi = \cos\varphi \left(\frac{\partial V^e}{\partial \vartheta} + \frac{U^m}{\sin\vartheta}\right) \tag{3.54}$$

Entsprechende Gleichungen wie (3.44) und (3.45) gelten auch in den beiden Kugelschalen:

$$u^i_{ges} = \frac{\cos\varphi}{2b}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} Z_n^1(k_o b)\left\{P^e_{n,i}\zeta_n^2(k_o r)+Q^e_{n,i}\zeta_n^1(k_o r)\right\} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.55}$$

$$v^i_{ges} = -\frac{ik_i \sin\varphi}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} \zeta_n^1(k_o b)\left\{P^m_{n,i}\zeta_n^2(k_o r) + Q^m_{n,i}\zeta_n^1(k_o r)\right\} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{3.56}$$

Die Koeffizienten $R_n^{e,m}$, $P_{n1}^{e,m}$, $P_{n2}^{e,m}$, $Q_{n1}^{e,m}$ und $Q_{n2}^{e,m}$ bestimmen sich durch Erfüllung der Randbedingungen an den Grenzflächen. Es ist zu fordern:

E_{tg} stetig bei $r = r_o$, r_1, d.h. $\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot u)$ und $k\cdot v$ stetig (3.57)

H_{tg} stetig bei $r = r_o$, r_1, d.h. $\frac{k}{\mu}\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot v)$ und $\frac{k^2}{\mu}u$ stetig (3.58)

$E_{tg} = o$ bei $r = r_2$, d.h. $\frac{\partial}{\partial r}(r\cdot u) = o$ und $k\cdot v = o$ (3.59)

Die Erfüllung der Randbedingungen führt auf ein Gleichungssystem 5.ter Ordnung. Es lautet im TM-Fall in Matrix-Schreibweise:

$$D^{e} \cdot \begin{pmatrix} R_n^e \\ P_{n1}^e \\ Q_{n1}^e \\ P_{n2}^e \\ Q_{n2}^e \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -Z_n^2(k_o r_o) \\ -\zeta_n^2(k_o r_o) \\ o \\ o \\ o \end{pmatrix} \qquad (3.60)$$

wobei die Matrix D^e folgendes Aussehen hat

$$\begin{pmatrix} Z_n^1(k_o r_o) & -Z_n^2(k_1 r_o) & -Z_n^1(k_1 r_o) & o & o \\ \zeta_n^1(k_o r_o) & -\frac{k_1^2}{k_{o\,1}^2}\zeta_n^1(k_1 r_o) & -\frac{k_1^2}{k_{o\,1}^2}\zeta_n^1(k_1 r_o) & o & o \\ o & Z_n^2(k_1 r_1) & Z_n^1(k_1 r_1) & -Z_n^2(k_2 r_1) & -Z_n^1(k_2 r_1) \\ o & \zeta_n^2(k_1 r_1) & \zeta_n^1(k_1 r_1) & -\frac{k_2^2}{k_{1\,2}^2}\zeta_n^2(k_2 r_1) & -\frac{k_2^2}{k_{1\,2}^2}\zeta_n^1(k_2 r_1) \\ o & o & o & Z_n^2(k_2 r_2) & Z_n^1(k_2 r_2) \end{pmatrix}$$

Im TE-Fall hat es folgendes Aussehen:

$$D^{m} \cdot \begin{pmatrix} R_n^m \\ P_{n1}^m \\ Q_{n1}^m \\ P_{n2}^m \\ Q_{n2}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\zeta_n^2(k_o r_o) \\ -Z_n^2(k_o r_o) \\ o \\ o \\ o \end{pmatrix} \qquad (3.61)$$

Hier hat die Matrix D^m folgende Gestalt:

$$\begin{pmatrix}
\zeta_n^1(k_o r_o) & -\frac{k_1}{k_o}\zeta_n^2(k_1 r_o) & -\frac{k_1}{k_o}\zeta_n^1(k_1 r_o) & 0 & 0 \\
Z_n^1(k_o r_o) & -\frac{k_1\mu_o}{k_o\mu_1}Z_n^2(k_1 r_o) & -\frac{k_1\mu_o}{k_o\mu_1}Z_n^1(k_1 r_o) & 0 & 0 \\
0 & \zeta_n^2(k_1 r_1) & \zeta_n^1(k_1 r_1) & -\frac{k_2}{k_1}\zeta_n^2(k_2 r_1) & -\frac{k_2}{k_1}\zeta_n^1(k_2 r_1) \\
0 & Z_n^2(k_1 r_1) & Z_n^1(k_1 r_1) & -\frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}Z_n^2(k_2 r_1) & -\frac{k_2\mu_1}{k_1\mu_2}Z_n^1(k_2 r_1) \\
0 & 0 & 0 & \zeta_n^2(k_2 r_2) & \zeta_n^1(k_2 r_2)
\end{pmatrix}$$

Diese beiden Gleichungssysteme zu lösen, bereitet einige Schwierigkeiten. Die Ausdrücke, die man durch formales Auflösen der entsprechenden Unterdeterminanten für die Reflexionsfaktoren R_n^e und R_n^m erhält, sind unbequem und zunächst physikalisch wenig anschaulich. Es wird daher zur Ableitung der Reflexionsfaktoren ein anderer Weg beschritten, der auf physikalisch durchsichtige Weise zum gleichen Ergebnis führt und zudem noch verallgemeinert werden kann. Später, bei der Durchführung der Watson-Transformation, werden wir wieder auf diese Gleichungssysteme zurückgreifen, weil sich aus ihnen leicht "Umlaufrelationen" für die Reflexionsfaktoren herleiten lassen.

4. Strahlenoptische Herleitung des Reflexionsfaktors

Wenn auf die geschichtete Kugel eine Welle (Strahl) auftrifft, so wird sie teils schon an der Oberfläche reflektiert, teils dringt sie in die sphärische Schichtung ein. In den einzelnen Schichten treten Mehrfachreflexionen auf, die alle Beiträge in den Außenraum der Kugel liefern. Die Summe über alle diese Beträge ergibt den Reflexionsfaktor der geschichteten Kugel, der identisch ist mit dem, der sich durch Auflösen der Gleichungssysteme (3.60) und (3.61) ergibt.

Bevor der Reflexionsfaktor der geschichteten Kugel bestimmt werden kann, müssen die Fresnelschen Koeffizienten für Reflexion und

Durchgang von Kugelwellen durch Kugelflächen eingeführt werden.

4.1 Sphärische Fresnelsche Koeffizienten

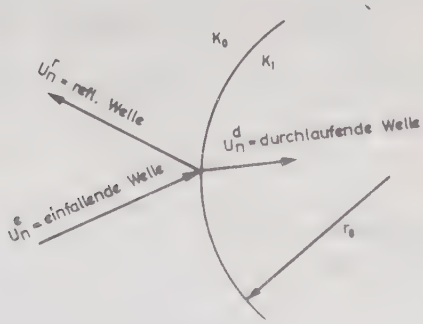


Abb. 2 Reflexion und Durchgang einer Kugelwelle an einer konvexen Kugelfläche

Auf eine Kugelfläche, die die beiden Medien o und 1 trennt, falle eine Kugelwelle aus dem Medium o kommend auf die konvexe Seite auf. Bei der Zeitabhängigkeit exp(-i ωt) beschreibt die sphärische Hankel-Funktion 2. Art, $\zeta_n^2(k_o r)$, eine in negativer r-Richtung laufende Kugelwelle. Für die einfallende Welle kann demnach angesetzt werden:

$$u_n^e \sim \zeta_n^2(k_o r)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{4.1}$$

An der Trennfläche wird diese Welle aufgespalten in eine reflektierte und eine durchgehende Welle, die in folgender Form angesetzt werden können:

$$u_n^r \sim R_{o1}^{e,m}\, \zeta_n^1(k_o r)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{4.2}$$

$$u_n^d \sim D_{o1}^{e,m}\, \zeta_n^2(k_o r)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{4.3}$$

Die Reihenfolge der unteren Indizes o1 beim Reflexions- und Durchgangsfaktor veranschaulicht die Tatsache, daß die Welle aus dem Medium o kommt und auf das Medium 1 auftrifft. Die oberen Indizes

e,m kennzeichnen den TM-Fall (e) bzw. den TE-Fall (m).

In der üblichen Weise werden für diese Wellenansätze die Grenzbedingungen erfüllt. Dies führt auf ein Gleichungssystem 2.ter Ordnung zur Bestimmung des Reflexions- und Durchgangsfaktors. Man erhält:

TM-Fall:

$$R^e_{o1} = \frac{\zeta^2_n(k_o r_o)}{\zeta^1_n(k_o r_o)} \cdot r^e_{o1} \tag{4.4}$$

mit

$$r^e_{o1} = \frac{-\frac{1}{x}\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^2_n(x)\Big|_{k_o r_o} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^2_n(x)\Big|_{k_1 r_o}}{\frac{1}{x}\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^1_n(x)\Big|_{k_o r_o} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^2_n(x)\Big|_{k_o r_o}} \tag{4.5}$$

und

$$D^e_{o1} = \frac{k_o^2}{k_1^2} \frac{\zeta^2_n(k_o r_o)}{\zeta^1_n(k_1 r_o)} (1 + r^e_{o1}) \tag{4.6}$$

Ist das Medium 1 unendlich gut leitend, so ist $D^e_{o1} = o$ und

$$R^e_{o1} = -\frac{Z^2_n(k_o r_o)}{Z^1_n(k_o r_o)} \tag{4.7}$$

TE-Fall:

$$R^m_{o1} = \frac{\zeta^2_n(k_o r_o)}{\zeta^1_n(k_o r_o)} r^m_{o1} \tag{4.8}$$

mit

$$r^m_{o1} = \frac{-x\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^2_n(x)\Big|_{k_o r_o} + x\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^2_n(x)\Big|_{k_1 r_o}}{x\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^1_n(x)\Big|_{k_o r_o} - x\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta^2_n(x)\Big|_{k_1 r_o}} \tag{4.9}$$

und

$$D^m_{o1} = \frac{\zeta^2_n(k_o r_o)}{\zeta^2_n(k_1 r_o)} (1 + r^m_{o1}) \tag{4.10}$$

Ist Medium 1 unendlich gut leitend, so ist $D^m_{o1} = o$ und

$$R^m_{o1} = -\frac{\zeta^2_n(k_o r_o)}{\zeta^1_n(k_o r_o)} \tag{4.11}$$

Die gleichen Überlegungen gelten, wenn die Kugelwelle auf die konkave Seite der Kugelfläche fällt. Es gelten folgende Ansätze:

$$u_n^e \sim \zeta_n^1(k_1 r)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{4.12}$$

$$u_n^r \sim R_{1o}^{e,m}\, \zeta_n^2(k_1 r)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{4.13}$$

$$u_n^d \sim D_{1o}^{e,m}\, \zeta_n^1(k_o r)\, P_n(\cos\vartheta) \tag{4.14}$$

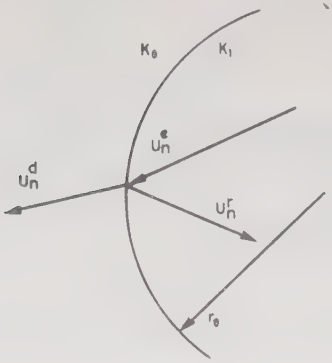


Abb. 3 Reflexion und Durchgang einer Kugelwelle an einer konkaven Kugelfläche.

Vergleicht man diese Ansätze mit denen von oben, so erkennt man, daß sich die Formeln für $R_{1o}^{e,m}$ und $D_{1o}^{e,m}$ aus denen für $R_{o1}^{e,m}$ und $D_{o1}^{e,m}$ ergeben, indem man k_1 mit k_o und ζ_n^1 mit ζ_n^2 vertauscht. Es ist also:

TM-Fall:
$$R_{1o}^e = \frac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^2(k_1 r_o)}\, r_{1o}^e \tag{4.15}$$

mit
$$r_{1o}^e = \frac{-\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_n^1(x)\Big|_{k_1 r_o} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_n^1(x)\Big|_{k_o r_o}}{\frac{1}{x}\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_n^2(x)\Big|_{k_1 r_o} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_n^1(x)\Big|_{k_o r_o}} \tag{4.16}$$

und
$$D_{1o}^e = \frac{k_1^2}{k_o^2}\,\frac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^1(k_o r_o)}\,(1 + r_{1o}^e) \tag{4.17}$$

TE-Fall:

$$R_{1o}^{m} = \frac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^2(k_1 r_o)}\, r_{1o}^{m} \tag{4.18}$$

mit

$$r_{1o}^{m} = \frac{-\, x \frac{d}{dx} \ln x\, \zeta_n^1(x)\Big|_{k_1 r_o} + x \frac{d}{dx} \ln x\, \zeta_n^1(x)\Big|_{k_o r_o}}{x \frac{d}{dx} \ln x\, \zeta_n^2(x)\Big|_{k_1 r_o} - x \frac{d}{dx} \ln x\, \zeta_n^1(x)\Big|_{k_o r_o}} \tag{4.19}$$

und

$$D_{1o}^{m} = \frac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^1(k_o r_o)}\,(1 + r_{1o}^{m}) \tag{4.20}$$

4.2 Reflexionsfaktor einer einfach geschichteten Kugel

Wir denken uns eine ideal leitende Kugel ummantelt von einer Schicht mit der Ausbreitungskonstante k_2. Das die geschichtete Kugel umgebende Medium habe die Ausbreitungskonstante k_1. Benutzen wir die

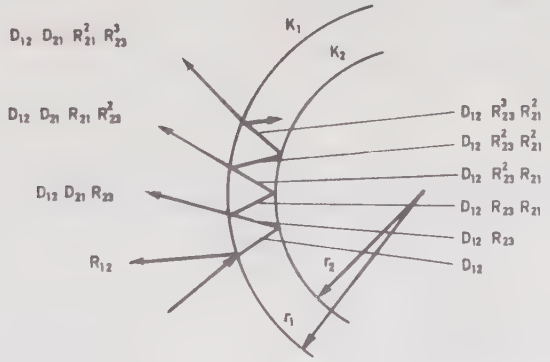


Abb. 4 Einfach geschichtete Kugel

im vorhergehenden Kapitel eingeführten Fresnelschen Reflexions- und Durchgangskoeffizienten, so können wir uns den Reflexionsfaktor der einfach geschichteten Kugel in folgender Weise ableiten: Ein auf die äußere Kugelschale auftreffender Strahl wird teilweise an dieser reflektiert (R_{12}), ein anderer Teil dringt in die Kugelschale ein (D_{12}), wird am Kugelkern reflektiert ($D_{12}R_{23}$) und tritt teilweise wieder in das äußere Medium aus ($D_{12}R_{23}D_{21}$). Der andere Teil wird

an der Trennfläche der Medien 1 und 2 reflektiert ($D_{12}R_{23}R_{21}$), trifft wieder auf den Kugelkern, wird dort reflektiert ($D_{12}R_{21}R_{23}^2$) und tritt wieder teilweise in das äußere Medium aus ($D_{12}R_{21}D_{21}R_{23}^2$). Den nach innen reflektierten Teil des Strahles können wir wieder genauso weiterverfolgen. Wir erhalten so für das Gesamtfeld in Medium 1 eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied die Gestalt $D_{12}D_{21}R_{21}^{n-1}R_{23}^n$ hat und einen Strahl darstellt, der einmal die Trennfläche der Medien 1 und 2 von 1 nach 2 durchtreten hat, n-mal am Kugelkern (der Trennfläche der Medien 2 und 3), (n-1)-mal an der Trennfläche der Medien 2 und 1 reflektiert worden ist und einmal die Trennfläche der Medien 2 und 1 von 2 nach 1 durchtreten hat:

$$R_{13} = R_{12}+D_{12}D_{21}R_{23}+D_{12}D_{21}R_{21}R_{23}^2+D_{12}D_{21}R_{21}^2R_{23}^3+\dots \qquad (4.21)$$

Die oberen Indizes e,m werden hier und im folgenden der Einfachheit halber weggelassen. Mit Hilfe der geometrischen Reihe läßt sich diese Reihe aufsummieren. Man erhält:

$$R_{13} = \frac{R_{12} + R_{23}\,(D_{12}D_{21} - R_{12}R_{21})}{1 - R_{21}R_{23}} \qquad (4.22)$$

bzw.
$$R_{13} = \frac{\zeta_n^2(k_1r_1)}{\zeta_n^1(k_1r_1)} \cdot \frac{r_{12}+ \dfrac{\zeta_n^1(k_2r_1)}{\zeta_n^2(k_2r_1)}\, R_{23}(1+r_{12}+r_{21})}{1 - \dfrac{\zeta_n^1(k_2r_1)}{\zeta_n^2(k_2r_1)}\, R_{23}\cdot r_{21}} \qquad (4.23)$$

$$= \frac{\zeta_n^2(k_1r_1)}{\zeta_n^1(k_1r_1)} \circ r_{13}$$

Hierbei ist

$$R_{23} = \begin{cases} -\dfrac{Z_n^2(k_2r_2)}{Z_n^1(k_2r_2)} & \text{TM-Fall} \qquad (4.24) \\ -\dfrac{\zeta_n^2(k_2r_2)}{\zeta_n^1(k_2r_2)} & \text{TE-Fall} \qquad (4.25) \end{cases}$$

r_{12} und r_{21} sind die Fresnelschen Koeffizienten aus 4.1.

4.3 Reflexionsfaktor der zweifach geschichteten Kugel

Nun denken wir uns eine zweite Schicht mit der Ausbreitungskonstante k_1 um die einfach geschichtete Kugel gelegt. Das äußere Medium habe die Ausbreitungskonstante k_o. Wir betrachten nun wieder einen Strahl, der auf die äußere Kugelschale auftrifft und an ihr teilweise reflektiert wird (R_{01}) und teilweise in sie eindringt (D_{01}).

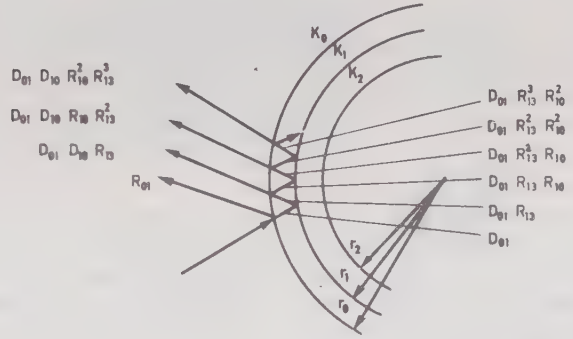


Abb. 5 **Zweifach geschichtete Kugel**

Der eindringende Strahl trifft auf eine einfach geschichtete Kugel auf; es liegen nun also dieselben Verhältnisse vor, wie sie im vorangegangenen Kapitel beschrieben worden sind. Alle Teilstrahlen, die von dieser einfach geschichteten Kugel ausgehend wieder in Medium 1 eindringen, fassen wir unter $D_{01}R_{13}$ zusammen, wobei R_{13} der im vorangegangenen Kapitel abgeleitete Reflexionsfaktor der einfach geschichteten Kugel ist. Wir können also die Gesamtheit der Teilstrahlen wie einen einzelnen Strahl behandeln und analog zum vorangegangenen Kapitel fortfahren. Wir erhalten wieder eine unendliche Reihe, deren allgemeines Glied die Gestalt $D_{01}D_{10}R_{10}^{n-1}R_{13}^{n}$ hat und einen "Strahl" darstellt, der einmal die Trennfläche der Medien o und 1 von o nach 1 durchtreten hat, n-mal an einer einfach geschichteten Kugel, (n-1)-mal an der äußeren Kugelfläche reflektiert worden ist und einmal diese Trennfläche von 1 nach o durchtreten hat:

$$R_{o3} = R_{o1} + D_{o1}D_{1o}R_{13} + D_{o1}D_{1o}R_{1o}R_{13}^2 + D_{o1}D_{1o}R_{1o}^2R_{13}^3 + \dots \qquad (4.26)$$

und daraus nach Summation:

$$R_{o3} = \frac{R_{o1} + R_{13}(D_{o1}D_{1o} - R_{o1}R_{1o})}{1 - R_{1o}R_{13}} \qquad (4.27)$$

bzw.
$$R_{o3} = \frac{\zeta_n^2(k_o r_o)}{\zeta_n^1(k_o r_o)} \cdot \frac{r_{o1} + \dfrac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^2(k_1 r_o)} \cdot \dfrac{\zeta_n^2(k_1 r_1)}{\zeta_n^1(k_1 r_1)} \cdot r_{13}(1 + r_{o1} + r_{1o})}{1 - \dfrac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^2(k_1 r_o)} \cdot \dfrac{\zeta_n^2(k_1 r_1)}{\zeta_n^1(k_1 r_1)} r_{1o}\, r_{13}} \qquad (4.28)$$

$$= \frac{\zeta_n^2(k_o r_o)}{\zeta_n^1(k_o r_o)} \cdot r_{o3}$$

Mittels einer für die Darstellungen dieser Arbeit zu umfangreichen Nebenrechnung zeigt man, daß der so gewonnene Reflexionsfaktor mit dem aus den Gleichungssystemen (3.6o) und (3.61) sich ergebenden übereinstimmt.

4.4 Reflexionsfaktor einer n-fach geschichteten Kugel

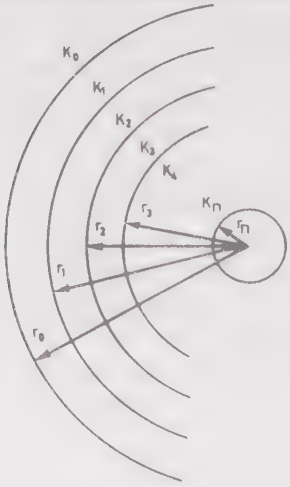


Abb. 6 n-fach geschichtete Kugel

Der Aufbau von (4.27) läßt erkennen, daß sich diese Formel auf eine n-fach geschichtete Kugel verallgemeinern läßt. Es ist R_{13} zu ersetzen durch R_{1n}, durch den Gesamtreflexionsfaktor einer (n-1)-fach geschichteten Kugel, die in ein Medium mit der Ausbreitungskonstante k_1 eingebettet ist. Es ist also:

$$R_{on} = \frac{R_{o1} + R_{1n}\,(D_{o1}D_{1o} - R_{o1}R_{1o})}{1 - R_{1o}R_{1n}} \tag{4.29}$$

$$R_{1n} = \frac{R_{12} + R_{2n}\,(D_{12}D_{21} - R_{12}R_{21})}{1 - R_{21}R_{2n}} \tag{4.30}$$

$$R_{2n} = \frac{R_{23} + R_{3n}\,(D_{23}D_{32} - R_{23}R_{32})}{1 - R_{32}R_{3n}} \tag{4.31}$$

$\vdots$

$R_{n-1,n}$ = Fresnelsche Reflexionskoeffizienten beim Übergang von n-1 nach n.

5. Spezialisierung der Schichten

Die beiden auf die ideal leitende Kugel aufgebrachten Schichten sollen Eigenschaften haben, die wir anhand der folgenden Überlegungen gewinnen.

Wir denken uns auf eine unendlich ausgedehnte ideal leitende Wand zwei Schichten aufgetragen, die die gleichen Dicken d_1 und d_2 und die gleichen Ausbreitungskonstanten k_1 und k_2 haben wie die entsprechenden Schichten bei der Kugel. Schichtdicken und Ausbreitungskonstanten (d.h. Materialeigenschaften) sollen so gewählt sein, daß bei einer senkrecht auftreffenden ebenen Welle die reflektierte Welle ausgelöscht wird.

Nach der in Kapitel 4 beschriebenen Methode läßt sich leicht der Reflexionsfaktor finden. Es ist:

$$R_{o3}^{e,m} = \frac{r_{o1}^{e,m} + R_{13}^{e,m}\, e^{2ik_1 d_1 \cos\varphi_1}}{1 + r_{o1}^{e,m} R_{13}^{e,m}\, e^{2ik_1 d_1 \cos\varphi_1}} \tag{5.1}$$

mit $$R_{13}^{e,m} = \frac{r_{12}^{e,m} + r_{23}^{e,m}\, e^{2ik_2 d_2 \cos\varphi_2}}{1 + r_{12}^{e,m} r_{23}^{e,m} e^{2ik_2 d_2 \cos\varphi_2}} \qquad (5.2)$$

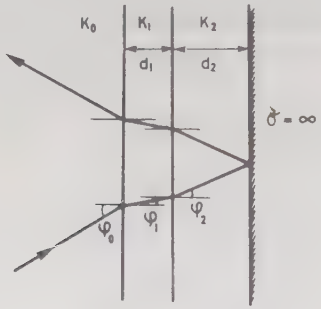


Abb. 7 Reflexionsmindernde ebene Schicht

Damit bei senkrechtem Einfall ($\varphi_1 = \varphi_2 = 0$) $R_{03}^{e,m} = 0$ ist, muß erfüllt sein:

$$r_{01}^{e,m} = - R_{13}^{e,m}\, e^{2ik_1 d_1} \qquad (5.3)$$

Zu einer besonders einfachen Beziehung gelangt man, wenn man $d_2 = \lambda_2/4$ wählt. Es ist dann $\exp(2ik_2 d_2) = -1$. Berücksichtigt man noch, daß $r_{23}^{m} = -1$ und $r_{23}^{e} = +1$ (idealer Leiter), so wird:

$$R_{13}^{e} = \frac{r_{12}^{e} - 1}{1 - r_{12}^{e}} = -1 \quad \text{und} \quad R_{13}^{m} = \frac{r_{12}^{m} + 1}{1 + r_{12}^{m}} = +1$$

Da nun $r_{01}^{e} = -r_{01}^{m}$ bei senkrechtem Einfall ist, folgt schließlich:

$$e^{2ik_1 d_1} = - \frac{k_0 - k_1}{k_0 + k_1} \quad \text{oder} \quad \operatorname{tg} k_1 d_1 = i \frac{k_0}{k_1} \qquad (5.4)$$

Nimmt man an, daß $|k_1 d_1| \ll 1$, so gilt $\operatorname{tg} k_1 d_1 \approx k_1 d_1 = ik_0/k_1$ und daher

$$d_1 = i \frac{k_0}{k_1^2} = i \frac{k_0}{\omega^2 \varepsilon \mu \left(1 + i \frac{\sigma}{\omega \varepsilon}\right)} \qquad (5.5)$$

Unter der Voraussetzung, daß $\sigma \gg 1$, $\mu = 1$ und $k_0 = \omega\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$ folgt:

$$d_1 = \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{\mu_0}} \cdot \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{120\, \pi\, \sigma} \qquad (5.6)$$

6. Integraldarstellung der Potentiale und Residuenreihen

Die Reihen (3.47) bis (3.50) konvergieren gut, solange $k_o r_o = 2\pi \frac{r_o}{\lambda} \ll 1$ ist, d.h. solange die Wellenlänge groß ist gegen den Radius der reflektierenden Kugel (Rayleighscher Grenzfall). In den meisten in der Praxis der Wellenausbreitung interessanten Fällen (Radarreflexion, Wellenausbreitung in kugelförmig geschichteter Atmosphäre) ist jedoch die Wellenlänge kleiner als der Kugelradius. Da zur hinreichend genauen Berechnung der Summen die Anzahl der zu berücksichtigenden Glieder etwa gleich dem Verhältnis Kugelradius zu Wellenlänge ist, werden diese Reihen schnell unbrauchbar, sobald man zu größeren Körpern übergeht, auch dann, wenn schnelle Rechner zur Verfügung stehen.

Um zu schneller konvergierenden Reihen zu gelangen, werden diese Reihen nach **W a t s o n** in ein Linienintegral überführt, das nach der Residuenmethode ausgewertet wird. Stellvertretend für die vier Reihen (3.47) bis (3.50) betrachten wir folgende Reihe (wir verwenden jetzt wieder anstelle von $R_{o3}^{e,m}$ die Bezeichnung $R_n^{e,m}$, um die Abhängigkeit des Reflexionsfaktors vom Index n anzudeuten):

$$S = -\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, \frac{\zeta_n^1(k_o b)}{n(n+1)} \left\{ \zeta_n^2(k_o r) + R_n^m\, \zeta_n^1(k_o r) \right\} P_n(\cos\vartheta) \quad (6.1)$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\, g(n)\, P_n(\cos\vartheta)$$

mit $$g(n) = \frac{\zeta_n^1(k_o b)}{n(n+1)} \left(\zeta_n^2(k_o r) + R_n^m\, \zeta_n^1(k_o r) \right), \quad (6.2)$$

Diese Reihe ist gleichlautend mit folgendem Integral:

$$S = \frac{1}{2i} \int_{C_1+C_2} \frac{2s+1}{\sin \pi s}\, g(s)\, P_s(-\cos\vartheta)\, ds \quad (6.3)$$

Hierbei ist $s = s_1 + is_2$; $C_1 + C_2$ ist der in Abb. 8 dargestellte Integrationsweg, der von $\infty - is_2$ kommt und nach $\infty + is_2$ läuft. Der Integrand hat an den Nullstellen von $\sin \pi s$ Pole erster

Ordnung. Mit $\cos \pi\ n = (-1)^n$ und $P_n(\cos \vartheta) = (-1)^n P_n(\cos \vartheta)$

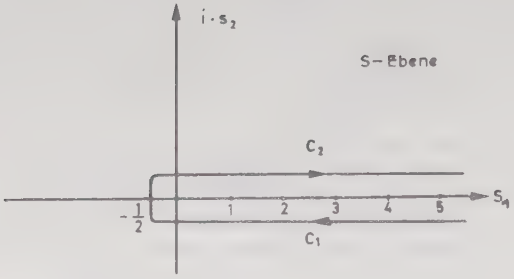


Abb. 8 Verlauf des Integrationsweges $C_1 + C_2$ in der komplexen s-Ebene

erhalten wir nach der Residuenmethode:

$$S = \frac{1}{2i} \cdot (-2\pi i) \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+1)}{\pi \cdot (-1)^n} g(n)(-1)^n P_n(\cos \vartheta)$$

$$= - \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1)\ g(n)\ P_n(\cos \vartheta) \qquad (6.4)$$

Da $P_o(\cos \vartheta) = 1$, liefert wegen der Differentiation nach ϑ in den Summen (3.47) bis (3.5o) das Residuum an der Stelle $s = o$ keinen Beitrag.

Mit Hilfe der Transformation $s \Rightarrow -s-1$ wird der Weg C_1 in einen Weg C_2 oberhalb der negativen reellen Achse transformiert. Wir benutzen die Formel $P_s(-\cos \vartheta) = P_{-s-1}(-\cos \vartheta)$ und erhalten so aus (6.3):

$$S = \frac{1}{2i} \int_{C_2} \frac{2s+1}{\sin \pi s}\ g(s) P_s(-\cos \vartheta)\, ds + \frac{1}{2i} \int_{C_3} \frac{2s+1}{\sin \pi s} g(-s-1) P_s(-\cos \vartheta)\, ds \qquad (6.5)$$

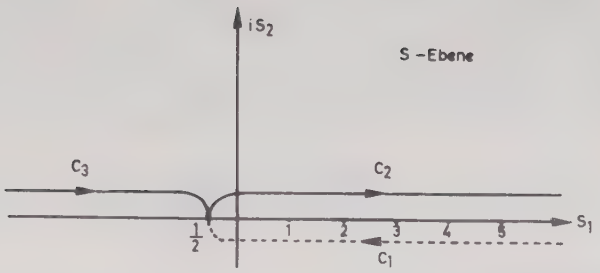


Abb.9 Verlauf des Integrationsweges $C_3 + C_2$ in der komplexen s-Ebene

Nun werden die Wege C_2 und C_3 in die obere Halbebene gedreht, bis sie zu beiden Seiten von Re(s) = -1/2 liegen. Die Integrale über

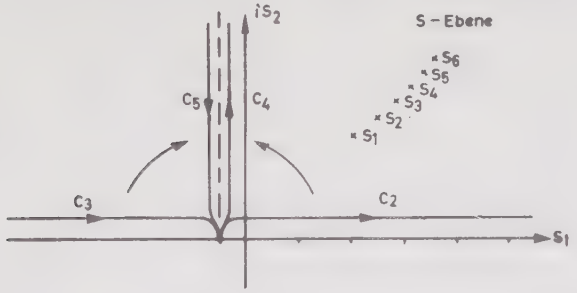


Abb. 10 Drehung von C_2 und C_3 in C_4 und C_5

Viertelkreise mit unendlich großem Radius im ersten und zweiten Quadranten liefern keinen Beitrag, da der Integrand dort verschwindet. Bei der Drehung der Integrationswege werden die Pole s_ν des Integranden überstrichen. Nach der Residuentheorie kann (6.3) als Summe an diesen Polen plus zwei Integrale über den oberen Teil von Re(s) = -1/2 geschrieben werden. Wir setzen $s = -1/2 + i\tau$. Damit wird $ds = i \cdot d\tau$, $-s-1 = -1/2 - i\tau$,

$\sin \pi s = -\cosh \pi\tau$, $2s+1 = 2i\tau$. Aus (6.3) folgt dann:

$$S = 2\pi i \sum_{\nu=1}^{\infty} \mathrm{Res}_\nu + J \tag{6.6}$$

wobei

$$J = \frac{1}{i} \int_0^\infty \frac{\tau P_{-\frac{1}{2}+i\tau}(-\cos\vartheta)}{\cosh \pi\tau} \left[g(-\tfrac{1}{2}-i\tau) - g(-\tfrac{1}{2}+i\tau) \right] d\tau \tag{6.7}$$

und

$$\mathrm{Res}_\nu = \frac{1}{2i} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \zeta^1_{s_\nu}(k_o b) \frac{P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin \pi s_\nu} \frac{C^m_{s_\nu}}{\frac{\partial}{\partial s} D^m_s \Big|_{s_\nu}} \zeta^1_{s_\nu}(k_o r) \tag{6.8}$$

mit $R^m_s = C^m_s / D^m_s$ (siehe dazu (6.13)).

Das Integral (6.7) hat, sofern der Kugelkern ideal leitend ist, exakt den Wert o. Um dies zu zeigen, ist nachzuweisen, daß $g(-1/2-i\tau) = g(-1/2+i\tau)$ ist, d.h. daß g symmetrisch zu $s = -1/2$ ist. Aus (6.2) folgt:

$$g(-\tfrac{1}{2}-i\tau) = \frac{\zeta^1_{-\frac{1}{2}-i\tau}(k_o b)}{(-\frac{1}{2}-i\tau)(-\frac{1}{2}+i\tau)} \left(\zeta^2_{-\frac{1}{2}-i\tau}(k_o r) + R^m_{-\frac{1}{2}-i\tau} \zeta^1_{-\frac{1}{2}-i\tau}(k_o r) \right) \tag{6.9}$$

Mit Hilfe der Umlaufrelationen der Hankelfunktionen folgt:

$$\left.\begin{aligned} \zeta^1_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x) &= e^{-\pi\tau}\, \zeta^1_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \\ \zeta^2_{-\frac{1}{2}-i\tau}(x) &= e^{\pi\tau}\, \zeta^2_{-\frac{1}{2}+i\tau}(x) \end{aligned}\right\} \tag{6.10}$$

Zur Bestimmung von $R^m_{-\frac{1}{2}-i\tau}$ betrachten wir das Gleichungssystem (3.6o). Sieht man von der ersten Spalte ab, so treten $\zeta^1_{-\frac{1}{2}-i\tau}$ und $\zeta^2_{-\frac{1}{2}-i\tau}$ sowie $Z^1_{-\frac{1}{2}-i\tau}$ und $Z^2_{-\frac{1}{2}-i\tau}$ immer paarweise auf in einer Zeile. In der gleichen Spalte treten immer nur Hankelfunktionen der gleichen Art auf. Daraus folgt, daß sich die aus (6.1o) ergebenden Faktoren $\exp(\pm \pi\tau)$ in der 2., 3., 4. und 5.ten Spalte aufheben und nur in der ersten Spalte ein Faktor übrig bleibt. Aus der Determinante des Gleichungssystemes (3.6o) kann daher wegen der in der ersten Spalte auftretenden Hankelfunktionen 1. Art der Faktor $\exp(-\pi\tau)$ herausgezogen werden. Da zu

Bestimmung von $R^{m}_{-\frac{1}{2}-i\tau}$ die erste Spalte durch die Inhomogenität ersetzt wird, kann jetzt wegen der dort auftretenden Hankelfunktionen 2. Art der Faktor $\exp(+\pi\tau)$ vor die Determinante gezogen werden. Daher gilt für den Reflexionsfaktor folgende Beziehung, die man ebenfalls als Umlaufrelation bezüglich des unteren Index bezeichnen kann:

$$R^{e,m}_{-\frac{1}{2}-i\tau} = e^{2\pi\tau}\, R^{e,m}_{-\frac{1}{2}+i\tau} \tag{6.11}$$

Diese Beziehung, sowie (6.1o) in (6.9) eingesetzt ergibt:

$$\begin{aligned} g(-\tfrac{1}{2}-i\tau) &= \frac{e^{-\pi\tau}\zeta^{1}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(k_o b)}{(-\frac{1}{2}-i\tau)\cdot(-\frac{1}{2}+i\tau)}\cdot\left(e^{\pi\tau}\zeta^{2}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(k_o r)+e^{2\pi\tau}R^{m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\cdot e^{-\pi\tau}\zeta^{1}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(k_o r)\right) \\ &= \frac{\zeta^{1}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(k_o b)}{(\frac{1}{2}+i\tau)(\frac{1}{2}-i\tau)}\cdot\left(\zeta^{2}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(k_o r)+ R^{m}_{-\frac{1}{2}+i\tau}\zeta^{1}_{-\frac{1}{2}+i\tau}(k_o r)\right) \qquad (6.12) \\ &= g\left(-\tfrac{1}{2}+i\tau\right) \end{aligned}$$

Damit ist gezeigt, daß das Integral (6.7) wegen seines symmetrischen Aufbaues verschwindet.

Zur Bestimmung von Res_{ν} schreiben wir den Reflexionsfaktor als Quotienten: $R^{e,m}_{n} = C^{e,m}_{n}/D^{e,m}_{n}$. Die Pole s_ν sind die Nullstellen von $D^{e,m}_{n}$. Schreiben wir den Ausdruck in der Klammer von (6.2) auf einen Bruchstrich, so erhält $\zeta^{2}_{s}(k_o r)$ als Faktor den Nenner des Reflexionsfaktors. Da an dessen Nullstellen das Residuum gebildet wird, verschwindet $\zeta^{2}_{s}(k_o r)$ in der Formel und es folgt für (6.6):

$$S = \pi\cdot\sum_{\nu=1,2,\ldots}\frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)}\,\zeta^{1}_{s_\nu}(k_o b)\,\frac{P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin\pi s_\nu}\,\frac{C_{s_\nu}}{\frac{\partial}{\partial s}D_{s}\big|_{s_\nu}}\,\zeta^{1}_{s_\nu}(k_o r) \tag{6.13}$$

Im einzelnen erhalten wir somit für die Reihen (3.47) bis (3.5o):

$$U^e = \frac{\pi}{2rb} \sum_{\nu=1,2,\ldots} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} Z^1_{s_\nu}(k_o b) \frac{P^1_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin(\pi\, s_\nu)} \frac{C^e_{s_\nu}}{\frac{\partial}{\partial\nu}D^e\big|_{s_\nu}} Z^1_{s_\nu}(k_o r) \qquad (6.14)$$

$$V^m = \frac{\pi k_o^2}{2} \sum_{\nu=1,2,\ldots} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \zeta^1_{s_\nu}(k_o b) \frac{P^1_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin(\pi\, s_\nu)} \frac{C^m_{s_\nu}}{\frac{\partial}{\partial\nu}D^m_\nu\big|_{s_\nu}} \zeta^1_{s_\nu}(k_o r) \qquad (6.15)$$

$$U^m = \frac{ik_o}{2r} \sum_{\nu=1,2,\ldots} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \zeta^1_{s_\nu}(k_o b) \frac{P^1_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin(\pi\, s_\nu)} \frac{C^m_{s_\nu}}{\frac{\partial}{\partial\nu}D^m_\nu\big|_{s_\nu}} Z^1_{s_\nu}(k_o r) \qquad (6.16)$$

$$V^e = \frac{ik_o}{2b} \sum_{\nu=1,2,\ldots} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} Z^1_{s_\nu}(k_o b) \frac{P^1_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin(\pi\, s_\nu)} \frac{C^e_{s_\nu}}{\frac{\partial}{\partial\nu}D^e_\nu\big|_{s_\nu}} \zeta^1_{s_\nu}(k_o r) \qquad (6.17)$$

Die Pole s_ν des Integranden sind die Nullstellen oder Eigenwerte der Determinanten der Gleichungssysteme (3.6o) und (3.61), die deswegen auch "Eigenwertgleichungen" genannt werden.

Genau genommen müssen wir $s_\nu^{e,m}$ schreiben, da wir je eine Eigenwertgleichung für den TE- und TM-Fall haben. Zur Verminderung der Schreibarbeit und Erhaltung der Übersichtlichkeit wollen wir aber auf den oberen Index verzichten.

Es sei hier noch erwähnt, daß das Verschwinden von $\zeta^2_s(k_o r)$ in der Gleichung (6.13) physikalisch bedeutet, daß in dieser Gleichung nur der Beugungsanteil enthalten ist und nicht etwa eine Überlagerung von gebeugtem und direkt einfallendem Feld.

7. Asymptotisches Verhalten der Hankelfunktionen

Um die Summen (6.14) bis (6.17) praktisch auswerten zu können, müssen Naherungsformeln für die dort auftretenden Hankelfunktionen bekannt sein. Das schwierigste Problem bei der praktischen Auswertung besteht darin, die Polstellen des Reflexionsfaktors in der komplexen s-Ebene zu bestimmen. Die gesuchten Näherungsformeln müssen daher für komplexes Argument und komplexen Index gelten.

Ohne auf die Herleitung im einzelnen einzugehen, werden im folgenden die asymptotischen Formeln von D e b e y e [2], [6], [8], [14] für die Hankelfunktionen angegeben. Sie ergeben sich aus der Sommerfeldschen Integraldarstellung der Zylinderfunktionen (im Hinblick auf die sphärischen Bessel- und Hankelfunktionen benutzen wir gleich den Index $s+1/2$)

$$Z_{s+\frac{1}{2}}(\rho) = \frac{1}{\pi} \int_{W} e^{i\rho \sin\tau + i(s+\frac{1}{2})\tau} \, d\tau \tag{7.1}$$

durch Auswertung nach der Sattelpunktmethode 2. Ordnung. Da die Watson-Transformation in der komplexen Indexebene der Hankelfunktionen durchgeführt wird, verschaffen wir uns einen Überblick über das Verhalten dieser Funktionen in dieser Ebene. Dabei reicht es aus, wenn wir uns auf den ersten Quadranten beschränken. Wir können nämlich, wie wir in diesem Kapitel sehen werden, die Wellenfunktionen $Z^1_{s_\nu}(k_o r)$ und $Z^1_{s_\nu}(k_o r)$ durch Darstellungen ersetzen, die sich im wesentlichen wie $e^{is_\nu \cdot r}$ verhalten. Mit $s_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ erhielten wir dem Energiesatz widersprechende angefachte Wellen, wenn $\beta_\nu < o$ wäre. Wäre $\alpha_\nu < o$, erhielten wir Wellen, die in negativer r-Richtung laufen und somit der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung widersprechen.

Den Zusammenhang zwischen der Integrationsebene der Integraldarstellung (7.1) und der Indexebene der Hankelfuntionen liefert die Bestimmungsgleichung der Sattelpunkte (Differentiation des Exponenten in (7.1)):

$$\cos\tau = \frac{s + \frac{1}{2}}{\rho} \tag{7.2}$$

Der Punkt $s = \rho$ ist Verzweigungspunkt für die asymptotische Darstellung. Als Verzweigungsschnitt wählt man die Nullstellenkurven h_1 und h_2 von $H^1_s(\rho)$ und $H^2_s(\rho)$, d.h. die Kurven, auf denen die Nullstellen der Hankelfunktionen liegen. In der Umgebung von $s = \rho$ werden h_1 und h_2 dargestellt mittels des positiven reellen Parameters a durch

$$\pm (s + \frac{1}{2}) = \rho + \rho^{1/3} \cdot a \cdot e^{\pm i \frac{\pi}{3}} \tag{7.3}$$

wobei das obere Vorzeichen für $H_s^1(\rho)$ und das untere für $H_s^2(\rho)$ zu wählen ist [2] .

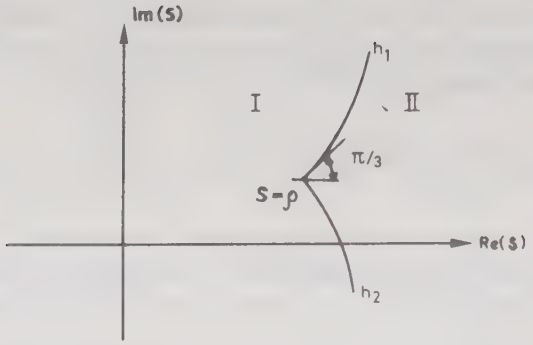


Abb. 11 Gebiete in der s-Ebene mit verschiedenen asymptotischen Darstellungen der Hankelfunktionen

Mit der Abkürzung $f = \rho(\sin\tau - \tau\cos\tau)$ erhält man im Gebiet I links von den Nullstellenkurven und zwar gleich schon für die sphärischen Hankelfunktionen die asymptotische Darstellung:

$$\rho\,\zeta_s^{1,2}(\rho) = \frac{e^{\pm i\cdot f \mp i\,\pi/4}}{\sqrt{\sin\tau}} \tag{7.4}$$

und damit nach Gl. (3.19)

$$z_s^{1,2}(\rho) = \pm\, i\,\sqrt{\sin\tau}\; e^{\pm i\cdot f \mp i\,\pi/4} \tag{7.5}$$

Für die in den Fresnelschen Reflexionskoeffizienten auftretenden logarithmischen Ableitungen folgt somit:

$$\frac{d}{dx}\ln x\,\zeta_{s_\nu}^{1,2}(x)\Big|_{x=\rho} = \pm i\cdot\sin\tau \tag{7.6}$$

Im Gebiet II rechts von den Nullstellenkurven gilt asymptotisch[+)]

[+)] Es ist zu beachten, daß die beiden Hankelfunktionen nur asymptotisch gleich werden. Sie bleiben also linear unabhängige Lösungen der Besselschen Differentialgleichung.

$$\rho\zeta_s^1(\rho) = -\rho\zeta_s^2(\rho) = -\frac{e^{-if+i\,\pi/4}}{\sqrt{\sin\tau}} \tag{7.7}$$

$$Z_s^1(\rho) = -Z_s^2(\rho) = i\sqrt{\sin\tau}\; e^{-if+i\,\pi/4} \tag{7.8}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x\,\zeta_s^{1,2}(x)\Big|_{x=\rho} = -i\cdot\sin\tau\,. \tag{7.9}$$

Auf den Nullstellenkurven und in einer gewissen Umgebung von ihnen gilt die Summe der links und rechts angrenzenden Darstellungen. Uns interessiert später nur die Nullstellenkurve h_1 und deren Umgebung. Dort ist:

$$\rho\zeta_s^1(\rho) = \frac{2i\,\sin(f-\pi/4)}{\sqrt{\sin\tau}} \tag{7.10}$$

$$Z_s^1(\rho) = 2i\sqrt{\sin\tau}\;\cos(f-\pi/4) \tag{7.11}$$

$$\frac{d}{dx}\ln x\zeta_s^1(x)\Big|_{x=\rho} = \sin\tau\cdot\operatorname{ctg}(f-\pi/4) = -\sin\tau\cdot\operatorname{tg}(f+\pi/4) \tag{7.12}$$

8. Überblick über die Größenordnungen der Kugelparameter

Nach Abb. 11 treten in den Hankelfunktionen, die den Reflexionsfaktor beschreiben, folgende fünf Argumente auf: k_0r_0, k_1r_0, k_1r_1, k_2r_1 und k_2r_2. Damit die im vorhergehenden Kapitel eingeführten

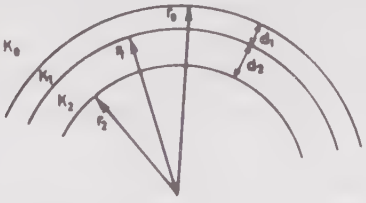


Abb. 12 Argumente der Hankelfunktionen

Näherungsformeln gelten sollen, dürfen diese Argumente betragsmäßig nicht zu nahe bei 1 liegen.

$k_o r_o = 10$, k_o = Ausbreitungskonstante des freien Raumes, erfüllt schon diese Bedingung. Da nach Kapitel 5 die erste Kugelschale aus einem guten Leiter bestehen soll, ist dort $k_1 = |k_1| \cdot e^{i \cdot \pi/4}$ mit $|k_1| \gg k_o$, während die Schichtdicke d_1 so klein wird, daß das Produkt $|k_1 d_1| \ll 1$ wird. Genaue Zahlenwerte sind aus folgender Tabelle zu entnehmen:

σ Siemens/m	k_1 [m^{-1}]	d_1 [m]	$k_1 \cdot d_1$	$k_1 \cdot r_o$	$k_1 \cdot r_1$
10^2	1539.1	$2.653_{10}{}^{-5}$	$0.408_{10}{}^{-1}$	774.597	774.584
10^3	4886.9	$2.653_{10}{}^{-6}$	$0.129_{10}{}^{-1}$	244.949	244.908

(8.1)

9. Verhalten des Reflexionsfaktors in der komplexen Indexebene

Mit Hilfe der Debeyeschen Näherungsformeln läßt sich eine grundlegende Eigenschaft des Reflexionsfaktors ableiten. Aus den Gleichungssystemen (3.60) und (3.61) folgt, wenn man unter $D_{11}^{e,m}$ und $D_{21}^{e,m}$ die Unterdeterminanten versteht, die durch Streichen der ersten Zeile und ersten Spalte bzw. der zweiten Zeile und der ersten Spalte entstehen:

$$R_s^e = \frac{-Z_s^2(k_o r_o) D_{11}^e + \zeta_s^2(k_o r_o) D_{21}^e}{Z_s^1(k_o r_o) D_{11}^e - \zeta_s^2(k_o r_o) D_{21}^e} \tag{9.1}$$

$$R_s^m = \frac{-\zeta_s^2(k_o r_o) D_{11}^m + Z_s^2(k_o r_o) D_{21}^m}{\zeta_s^1(k_o r_o) D_{11}^m - Z_s^1(k_o r_o) D_{21}^m} \tag{9.2}$$

Die Determinanten $D_{11}^{e,m}$ und $D_{21}^{e,m}$ sind von $k_o r_o$ nicht mehr abhängig. Wir berücksichtigen nun, daß rechts von der Nullstellenkurve die beiden Hankelfunktionen entgegengesetzt gleich werden. Das bedeutet, daß $R_s^{e,m} = R^{e,m}(s) \to 1$ geht, unabhängig davon, welche spezielle Näherungen für die Hankelfunktionen mit den Argumenten $k_1 r_o$, $k_1 r_1$,

k_2r_1 und k_2r_2 gewählt sind, d.h. unabhängig davon, wo in der s-Ebene diese Argumente bezüglich k_or_o liegen. Rechts von der

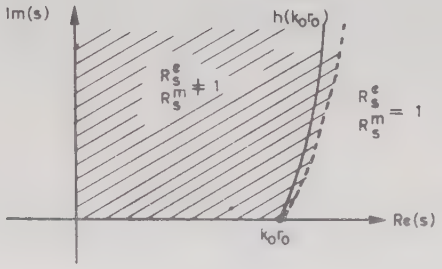


Abb. 13 Grobe Einteilung der s-Ebene

Nullstellenkurve $h(k_or_o)$ können demnach keine Pole des Reflexionsfaktors liegen; sie liegen links von $h(k_or_o)$ oder in einer gewissen Umgebung dieser Kurve

Dieses Ergebnis läßt sich unmittelbar auf eine n-fach geschichtete Kugel übertragen. Die Erfüllung der Randbedingungen an den n Trennflächen führt auf 2n Bestimmungsgleichungen für die 2n+1 Koeffizienten, die das Feld im Außenraum und in den n Schichten in positiver und negativer r-Richtung beschreiben. Dazu kommt noch die Bedingung $E_{tg} = o$ am ideal leitenden Kugelkern. Die Determinante des so entstehenden Gleichungssystemes hat demnach 2n+1 Zeilen und Spalten. Wegen der Randbedingungen an der äußersten Kugelschale entstehen auch hier, analog zur zweifach geschichteten Kugel, die Koeffizienten $Z_s^1(k_or_o)$ und $\zeta_s^1(k_or_o)$. Diese Koeffizienten nehmen auch hier die beiden ersten Plätze in der ersten Spalte der Determinanten ein. Die übrigen Plätze in der ersten Spalte sind mit Nullen besetzt. Daher entstehen, wenn man den Reflexionsfaktor berechnet, dieselben Ausdrücke wie in (9.1) und (9.2) mit dem Unterschied, daß hier die Determinanten $D_{11}^{e,m}$ und $D_{21}^{e,m}$ n Zeilen und n Spalten haben. Auch hier enthalten diese Determinanten keine Hankelfunktionen mehr mit dem Argument k_or_o. Daher gilt auch hier die Aussage, daß rechts von der Nullstellenkurve $h(k_or_o)$ die

Reflexionsfaktoren den konstanten Wert 1 annehmen und daher die Pole links von der Nullstellenkurve oder in ihrer Umgebung zu suchen sind.

Dieses Ergebnis ist sehr bemerkenswert; denn bei einem noch so komplizierten Aussehen der Eigenwertgleichung bei einer n-fach geschichteten Kugel kann auf ganz einfache Weise eine Aussage gewonnen werden über die Lage der Pole bzw. Eigenwerte in der komplexen s-Ebene.

Zur genaueren Untersuchung der Reflexionsfaktoren nehmen wir die in Abb. 14 dargestellten Verhältnisse an. Die Kurven $h(k_i r_i)$ sind die Nullstellenkurven der $\zeta_s^{-1}(k_i r_i)$.

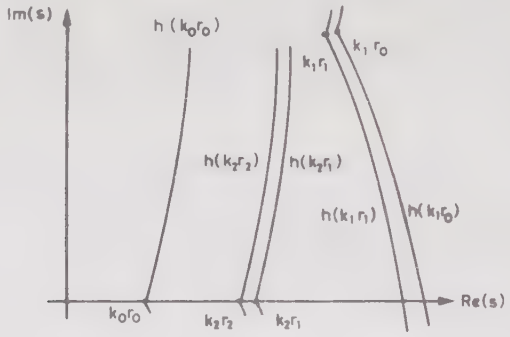


Abb. 14 Einteilung in der s-Ebene

Unter den in dieser Abbildung dargestellten Verhältnissen brauchen wir zur genaueren Beschreibung der Reflexionsfaktoren zwei verschiedene Darstellungen:

1.) eine Darstellung, die links von $h(k_o r_o)$ gilt,

2.) eine Darstellung, die auf $h(k_o r_o)$ und in einer gewissen Umgebung davon gilt.

9.1 Reflexionsfaktor links von der Nullstellenkurve $h(k_o r_o)$

Aus Abb. 14 ist ersichtlich, daß für sämtliche in den Reflexionsfaktoren vorkommenden Hankelfunktionen die Debeyeschen Näherungen gelten. Mit den in Kapitel 7 eingeführten Näherungen für die logarithmischen Ableitungen folgt zunächst für die Fresnelschen Koeffizienten:

TE-Fall:

$$r^e_{01} = -r^e_{10} = \frac{k_1 \sin \tau_{oo} - k_o \sin \tau_{1o}}{k_1 \sin \tau_{oo} + k_o \sin \tau_{1o}} \tag{9.3}$$

$$r^e_{12} = -r^e_{21} = \frac{k_2 \sin \tau_{11} - k_1 \sin \tau_{21}}{k_2 \sin \tau_{11} + k_1 \sin \tau_{21}} \tag{9.4}$$

TM-Fall:

$$r^m_{01} = -r^m_{10} = \frac{k_o \sin \tau_{oo} - k_1 \sin \tau_{1o}}{k_o \sin \tau_{oo} + k_1 \sin \tau_{1o}} \tag{9.5}$$

$$r^m_{12} = -r^m_{21} = \frac{k_1 \sin \tau_{11} - k_2 \sin \tau_{21}}{k_1 \sin \tau_{11} + k_2 \sin \tau_{21}} \tag{9.6}$$

Weiter wird:

$$\frac{\zeta^1_s(k_1 r_o)}{\zeta^2_s(k_1 r_o)} \cdot \frac{\zeta^2_s(k_1 r_1)}{\zeta^1_s(k_1 r_1)} \approx e^{2i(f_{1o} - f_{11})} \approx e^{2ik_1 d_1} \tag{9.7}$$

und damit

$$\left.\begin{aligned} \text{TM-Fall:}\ & \frac{\zeta^1_s(k_2 r_1)}{\zeta^2_s(k_2 r_1)} \cdot \frac{Z^2_s(k_2 r_2)}{Z^1_s(k_2 r_2)} \\ \text{TE-Fall:}\ & \frac{\zeta^1_s(k_2 r_1)}{\zeta^2_s(k_2 r_2)} \cdot \frac{\zeta^2_s(k_2 r_2)}{\zeta^1_s(k_2 r_2)} \end{aligned}\right\} = \mp e^{2i(f_{21} - f_{22})} \tag{9.8}$$

$$\frac{\zeta^2_s(k_o r_o)}{\zeta^1_s(k_o r_o)} = e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)} \tag{9.9}$$

Für den Gesamtreflexionsfaktor folgt somit:

$$R_s^{e,m} = e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)} \frac{r_{o1}^{e,m} + e^{2i(f_{1o}-f_{11})} r_{13}^{e,m}}{1 + e^{2i(f_{1o}-f_{11})} r_{o1}^{e,m} r_{13}^{e,m}} \qquad (9.1o)$$

wobei

$$r_{13}^{e,m} = \frac{r_{12}^{e,m} \pm e^{2i(f_{21}-f_{22})}}{1 \pm e^{2i(f_{21}-f_{22})} r_{12}^{e,m}} \quad \text{ist.} \qquad (9.11)$$

Dabei wurde folgende Abkürzung benutzt:

$$f_{ik} = k_i r_k (\sin \tau_{ik} - \tau_{ik} \cos \tau_{ik}) \quad i,k = o,1,2... \qquad (9.12)$$

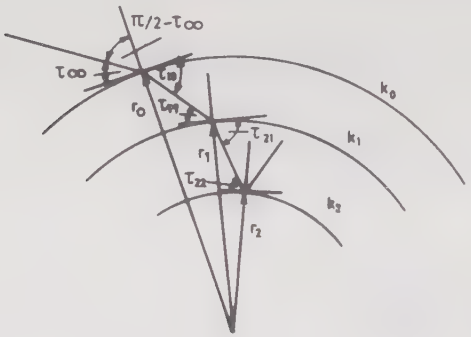


Abb. 15 Physikalische Deutung der Winkel τ_{ik}

Die Formeln (9.3) bis (9.6) zeigen, daß aus den sphärischen Fresnelschen Reflexionskoeffizienten mit Hilfe der Debeyeschen Näherungsformeln für die Hankelfunktionen die Koeffizienten für die Reflexion einer ebenen Welle an einer ebenen Wand entstehen (WKB-Näherung). Bleiben wir in der komplexen s-Ebene zunächst auf der reellen Achse, so können wir die Winkel $\pi/2 - \tau_{ik}$ als Einfallswinkel für einen die Kugel treffenden Strahl deuten. Die Winkel τ_{ik} ergeben sich aus der Bestimmungsgleichung der Sattelpunkte (7.2). Es ist

$$\cos \tau_{ik} = (s + \tfrac{1}{2})/k_i r_k \qquad (9.13)$$

Ersetzen wir s durch $k_o r_o \cdot \cos \tau_{oo}$, so erhalten wir nacheinander:

$$\left.\begin{aligned} \cos \tau_{1o} &= \frac{k_o}{k_1} \cos \tau_{oo} \\ \cos \tau_{11} &= \frac{k_o r_o}{k_1 r_1} \cos \tau_{oo} \\ \cos \tau_{21} &= \frac{k_o r_o}{k_2 r_1} \cos \tau_{oo} \\ \cos \tau_{22} &= \frac{k_o r_o}{k_2 r_2} \cos \tau_{oo} \end{aligned}\right\} \qquad (9.14)$$

Dies ist aber das Snelliussche Brechungsgesetz in Kugelkoordinaten für einen Strahl, der unter dem Einfallswinkel $\pi/2 - \tau_{oo}$ auf die Kugel auftrifft und mit den einzelnen Kugelschalen mit den Radien r_o, r_1 und r_2 und den Materialeigenschaften k_1 und k_2 die Einfalls- bzw. Austrittswinkel $\pi/2 - \tau_{1o}$, $\pi/2 - \tau_{11}$, $\pi/2 - \tau_{21}$, $\pi/2 - \tau_{22}$ bildet. Wenn wir also in der s-Ebene im Ursprung starten und auf der reellen Achse uns auf den Punkt $s = k_o r_o$ zubewegen, so entspricht dies folgender Tatsache: Im Ursprung ist $\cos \tau_{oo} = o$, daher $\tau_{oo} = \pi/2$. Dem entspricht ein Strahl, der die

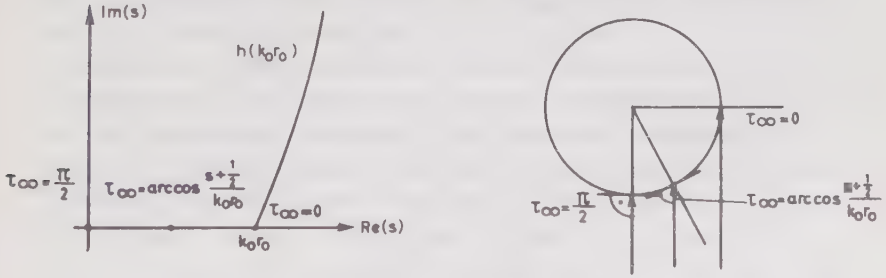


Abb. 16 Zusammenhang zwischen Lage des Sattelpunktes in der s-Ebene und Lage des einfallenden Strahles zur Kugel

Kugel radial, d.h. mit dem Einfallswinkel o trifft. Auch die übrigen Winkel sind im Ursprung = o. Da die Debeyeschen

Näherungen die "ebenen" Fresnelschen Reflexionskoeffizienten liefern, ist mit der Bedingung (5.4) der Reflexionsfreiheit für den radial auftreffenden Strahl eine Auslöschung zu erwarten. In der Tat ist mit $\tau_{ik} = \frac{\pi}{2} f_{21} - f_{22} = k_2 r_1 - k_2 r_2 = \frac{2\pi}{\lambda_2} \cdot \frac{\lambda_2}{4} = \frac{\pi}{2}$ und daher $e^{2i(f_{21}-f_{22})} = e^{i\pi} = -1$. Somit ist:

$$r_{e2}^{e,m} = \frac{r_{12}^{e,m} \mp 1}{1 \mp r_{12}^{e,m}} = \mp 1 \tag{9.15}$$

Für den Gesamtreflexionsfaktor folgt daher:

$$R_s^{e,m} = e^{-2i(k_o r_o - \pi/4)} \frac{r_{12}^{e,m} \mp e^{2ik_1 d_1}}{1 \mp e^{2ik_1 d_1} r_{o1}^{e,m}} \tag{9.16}$$

Im Zähler steht die Bedingung (5.4) für die Reflexionsfreiheit; der Reflexionsfaktor hat also den Wert o für einen radial auftreffenden Strahl.

Da wir uns in der s-Ebene zunächst auf Verhältnisse entsprechend Abb. 14 beschränken, wir also $k_2 > k_o$ gewählt haben ($|k_1|$ ist ohnehin $\gg k_o$), entspricht einem reellen τ_{oo} immer auf Grund von (9.13) ein τ_{10}, τ_{11}, τ_{21}, τ_{22}, die größer sind als τ_{oo}, d.h. der auf die Kugel auftreffende Strahl wird in den einzelnen Kugelschalen zum Einfallslot hin gebrochen. Da $|k_1| \gg k_o$ ist, oder anders ausgedrückt, da wir uns in der s-Ebene noch weit links von $h(k_1 r_o)$ und $h(k_1 r_1)$ befinden, können wir näherungsweise auf dem reellen Intervall $\{o, k_o r_o\}$ nach Gleichung (9.14) τ_{10} und $\tau_{11} = \frac{\pi}{2}$ setzen, d.h. der auf die geschichtete Kugel auftreffende Strahl durchläuft die erste Kugelschale annähernd in radialer Richtung. Wir können also vereinfacht schreiben:

$$e^{2i(f_{10}-f_{11})} = e^{2i(k_1 r_o - k_1 r_1)} = e^{2ik_1 d_1} \tag{9.17}$$

Der in die zweite Kugelschale eindringende Strahl bildet mit dem Einfallslot einen Winkel $\pi/2 - \tau_{21}$, der wegen $k_2 > k_o$ kleiner als $\frac{\pi}{2} - \tau_{oo}$ ist. Nähern wir uns dem Punkt $k_o r_o$, d.h. gehen wir

zu streifendem Einfall über, so ist immer noch $s/k_2 r_{1,2} < 1$, d.h. die Winkel τ_{21} und τ_{22} sind reell und $< \frac{\pi}{2}$. Physikalisch heißt dies, daß wie in Abb. 16 oder Abb. 17 gezeichnet, in der zweiten Kugelschale immer ein Strahl existiert, der unter einem von $\frac{\pi}{2}$ verschiedenen Einfallswinkel den Kugelkern trifft und dort eine geführte Welle hervorruft.

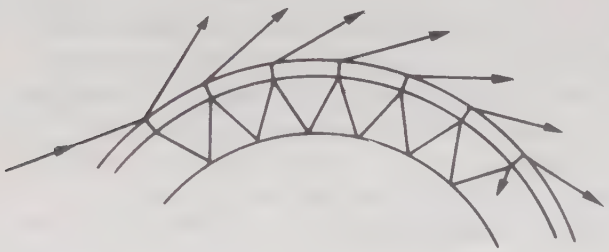


Abb. 17 Geführte Welle in der zweiten Kugelschale

Sattelpunkte links von $h(k_o r_o)$ veranlassen also eine geführte Welle in der zweiten Kugelschale, die beim Umlaufen fortlaufend Energie nach außen liefert. Selbstverständlich kommt es auch in der ersten Kugelschale zur Ausbildung einer umlaufenden Welle, jedoch ist sie wegen der guten Leitfähigkeit dieser Schicht stark gedämpft. Diese Schicht schwächt aber die von außen zur zweiten Schicht dringenden Strahlen und umgekehrt die von der zweiten Schicht nach außen dringenden Strahlen nicht merkenswert ab, da ihre Dicke d_1 so klein ist, daß $|k_1 d_1| \ll 1$ ist.

Im geometrisch optischen Schattengebiet hinter der Kugel kommt also zum gebeugten Energieanteil noch ein Anteil, der durch reine Brechung zu erklären ist.

Wir haben eben gesehen, daß der radial auftreffende Strahl ausgelöscht wird. Wegen der Existenz der in der zweiten Kugelschale geführten Welle ist aber die Rückstrahlung in Einfallsrichtung nicht exakt Null, da auch an dieser Stelle Energie nach außen geliefert wird. Eine Nullstelle im Rückstrahldiagramm ergibt sich

erst für sehr große Kugelradien und für $k_2 \gg k_o$. In diesem Fall ist 1.) der Weg um die Kugel für die geführte Welle weiter, wodurch es zu stärkerer Energieabstrahlung kommt, bis die geführte Welle wieder die Vorderseite der Kugel erreicht, 2.) sind die Winkel τ_{12} und τ_{22} wegen $k_2 \gg k_o$ nahe bei $\frac{\pi}{2}$, wodurch die Reflexionen in der zweiten Kugelschale häufiger stattfinden, als wenn der Kern flacher getroffen würde.

Wir können jetzt auch leicht einsehen, warum in den Mieschen Reihen bei der Summation so viele Glieder zu berücksichtigen sind wie $k_o r_o$ zahlenmäßig groß ist. Der Summation der Mieschen Reihen entspricht in der s-Ebene ein Fortschreiten auf der reellen Achse. Rechts von $k_o r_o$ wird $R^{e,m}(s) = R_n^{e,m} = 1$ (n ganzzahlig). Das reflektierte Feld haben wir in der Form $A_n^{e,m} \cdot \zeta_n^1(k_o r) P_n^1(\cos\vartheta)$ angesetzt. Dabei war $2A_n^{e,m} + 1 = R_n^{e,m}$. Mit $R_n^{e,m} = 1$ wird $A_n^{e,m} = o$. Rechts von $k_o r_o$, in der Summe also für $n > k_o r_o$, werden die einzelnen Summanden gleich Null, wodurch die Konvergenz der Summe erreicht wird.

Zur Untersuchung des Verhaltens des Reflexionsfaktors in der übrigen Ebene links von $h(k_o r_o)$ und bis auf die Umgebung von $h(k_o r_o)$ eignet sich die Darstellung (7.6). Da alle im Reflexionsfaktor vorkommenden Funktionen stetig bezüglich s sind, geht der Reflexionsfaktor für komplexe s stetig aus den Werten hervor, die er auf der reellen Achse annimmt.

In der Umgebung von $h(k_o r_o)$ gelten mit Hilfe von (7.12) folgende Darstellungen:

TM-Fall:

$$r_{o1}^e = \frac{k_1 \sin\tau_{oo} - k_o \sin\tau_{1o}}{k_1 \sin\tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4) + k_o \sin\tau_{1o}} \tag{9.18}$$

$$r_{1o}^e = \frac{k_o \sin\tau_{1o} - k_1 \sin\tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4)}{k_o \sin\tau_{1o} + k_1 \sin\tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4)} \tag{9.19}$$

$$S^e = 1 + r_{o1}^e + r_{1o}^e = \frac{k_1 \sin\tau_{oo} + k_o \sin\tau_{1o}}{k_1 \sin\tau_{1o}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4) + k_o \sin\tau_{1o}} \tag{9.2o}$$

TE-Fall:

$$r_{o1}^{m} = \frac{k_o \sin \tau_{oo} - k_1 \sin \tau_{1o}}{k_o \sin \tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4) + k_1 \sin \tau_{1o}} \tag{9.21}$$

$$r_{1o}^{m} = \frac{k_1 \sin \tau_{1o} - k_o \sin \tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4)}{k_o \sin \tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4) + k_1 \sin \tau_{1o}} \tag{9.22}$$

$$S^{m} = 1 + r_{o1}^{m} + r_{1o}^{m} = \frac{k_o \sin \tau_{oo} + k_1 \sin \tau_{1o}}{k_o \sin \tau_{oo}\, i\, tg(f_{oo} + \pi/4) + k_1 \sin \tau_{1o}} \tag{9.23}$$

$$\frac{\zeta_s^2(k_o r_o)}{\zeta_s^1(k_o r_o)} = \frac{e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)}}{1 - e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)}} \tag{9.24}$$

$r_{o2}^{e,m}$ sowie $e^{2i(f_{1o} - f_{11})}$ ändern ihre Darstellung nicht. Damit folgt für den Reflexionsfaktor:

$$R_s^{e,m} = \frac{e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)}}{1 - e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)}} \cdot \frac{r_{o1}^{e,m} + e^{2i(f_{1o} - f_{11})} r_{o2}^{e,m} S^{e,m}}{1 - e^{2i(f_{1o} - f_{11})} r_{o2}^{e,m} r_{1o}^{e,m}} \tag{9.25}$$

9.2 Pole des Reflexionsfaktors

Zur numerischen Durchführung der Watson-Transformation müssen die Polstellen des Reflexionsfaktors bekannt sein. In allgemeinster Form ergeben sie sich durch Nullsetzen der Determinanten der Gleichungssysteme (3.6o) und (3.61). Mit den in Kapitel 4 eingeführten Reflexionsfaktoren lassen sich die Polstellengleichungen übersichtlicher schreiben:

$$\frac{\zeta_s^1(k_1 r_o)}{\zeta_s^2(k_1 r_o)} \cdot \frac{\zeta_s^2(k_1 r_1)}{\zeta_s^1(k_1 r_1)} \cdot r_{1o}^{e,m} \cdot r_{13}^{e,m} = 1 \tag{9.26}$$

Aus dieser Gleichung lassen sich die Polstellen (Nullstellen dieser Gleichung) nicht mehr analytisch bestimmen. Zu numerischen Ergebnissen gelangt man nur noch, wenn man mit Hilfe geeigneter Suchprogramme das Relief des Absolutbetrages dieser Gleichung mit elektronischen Rechenanlagen auf Nullstellen hin abtastet. In gewissen

Grenzfällen lassen sich Näherungsformeln noch ableiten.

Eine grobe Abschätzung zur Lage der Nullstellen gibt folgende Überlegung: Wir haben gesehen, daß rechts von der Nullstellenkurve $h(k_o r_o)$ der Reflexionsfaktor konstant gleich 1 wird. Andererseits verhalten sich die Hankelfunktionen, wie die Debeyeschen Näherungen zeigen, links von der Nullstellenkurve wie Exponentialfunktionen. Sie verändern sich dort also langsam. In unmittelbarer Umgebung der Nullstellenkurve verhalten sie sich wie trigonometrische Funktionen. Sie verändern sich dort also schnell. Wir haben demnach Pole in der Nähe der Nullstellenkurve $h(k_o r_o)$ zu erwarten.

1o. Grenzfall $k_o r_o \gg 1$, $k_2 \gg k_o$

Der Grenzfall Wellenlänge $\ll$ gegen äußeren Kugelradius und $k_2 \gg k_o$ führt zu einigen interessanten Ergebnissen. Die Polstellengleichung läßt sich so vereinfachen, daß sich eine brauchbare Näherungsformel zur Bestimmung der Pole aufstellen läßt.

1o.1 Reflexionfaktor

Im folgenden werden wieder die Debeyeschen Näherungen für die Hankelfunktionen benutzt. Für die Hankelfunktionen mit dem Argument $k_o r_o$ wollen wir aber vorerst noch keine Näherung einführen, damit die entstehenden Formeln im gesamten Variationsbereich des Reflexionsfaktors gültig bleiben.

Mit $k_2 \gg k_o$ und der ohnehin erfüllten Bedingung $|k_1| \gg k_o$ lassen sich folgende Vereinfachungen einführen:

$$\left.\begin{array}{rl} & \cos\tau_{1o} \approx \cos\tau_{11} \approx \cos\tau_{21} \approx \cos\tau_{22} \approx o \\ \text{also} & \tau_{1o} \approx \tau_{11} \approx \tau_{21} \approx \tau_{22} \approx \frac{\pi}{2} \\ & \sin\tau_{1o} \approx \sin\tau_{11} \approx \sin\tau_{21} \approx \sin\tau_{22} \approx 1 \end{array}\right\} \qquad (1o.1)$$

d.h. die auf die Kugel auftreffenden Strahlen durchqueren die einzelnen Kugelschalen annähernd in radialer Richtung. Aus (9.11) folgt dann:

$$r_{13}^{e,m} \longrightarrow \frac{r_{12}^{e,m} \pm e^{2ik_2d_2}}{1 \pm e^{2ik_2d_2} r_{12}^{e,m}} = \frac{r_{12}^{e,m} \mp 1}{1 \mp e^{2ik_2d_2}} \longrightarrow \mp 1 \qquad (10.2)$$

Für die Fresnelschen Koeffizienten beim Übergang vom Vakuum zur ersten Kugelschale erhält man mit $\frac{d}{dx} \ln x\, \zeta_s^{1,2}(x)\Big|_{x=\rho} = \pm \frac{i}{\rho}$ im TM-Fall:

$$r_{01}^{e} = \frac{\zeta_s^1(k_0r_0)}{\zeta_s^2(k_0r_0)} \cdot \frac{-Z_s^2(k_0r_0) - i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^2(k_0r_0)}{Z_s^1(k_0r_0) + i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)} \qquad (10.3)$$

$$r_{10}^{e} = -\frac{Z_s^1(k_0r_0) - i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)}{Z_s^1(k_0r_0) + i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)} \qquad (10.4)$$

$$1+r_{01}^{e}+r_{10}^{e} = \frac{\zeta_s^1(k_0r_0)}{\zeta_s^2(k_0r_0)} \cdot \frac{-Z_s^2(k_0r_0) + i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^2(k_0r_0)}{Z_s^1(k_0r_0) + i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)} \qquad (10.5)$$

Nach kurzer Rechnung erhält man damit:

$$R_s^{e} = \frac{i\, \mathrm{tg} k_1d_1\, Z_s^2(k_0r_0) - i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^2(k_0r_0)}{-i\mathrm{tg} k_1d_1\, Z_s^1(k_0r_0) + i\frac{k_0}{k_1} k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)} \qquad (10.6)$$

Wir setzen nun die Bedingung (5.4) der Reflexionsfreiheit ein und erhalten:

$$R_s^{e} = \frac{Z_s^2(k_0r_0) + i\, k_0r_0\, \zeta_s^2(k_0r_0)}{Z_s^1(k_0r_0) + i\, k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)} = -\frac{\zeta_s^2(k_0r_0)}{\zeta_s^1(k_0r_0)} \frac{\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_s^2(x) \quad + i}{\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_s^1(x) \quad + i} \qquad (10.7)$$

Im TE-Fall erhält man analog:

$$r_{01}^{m} = \frac{\zeta_s^1(k_0r_0)}{\zeta_s^2(k_0r_0)} \cdot \frac{i\frac{k_0}{k_1} Z_s^2(k_0r_0) - k_0r_0\, \zeta_s^2(k_0r_0)}{-i\frac{k_0}{k_1} Z_s^1(k_0r_0) + k_0r_0\, \zeta_s^1(k_0r_0)} \qquad (10.8)$$

$$r_{1o}^{m} = \frac{k_o r_o\, \zeta_s^1(k_o r_o) + i\,\frac{k_o}{k_1}\, Z_s^1(k_o r_o)}{k_o r_o\, \zeta_s^1(k_o r_o) - i\,\frac{k_o}{k_1}\, Z_s^1(k_o r_o)} \tag{1o.9}$$

$$1 + r_{o1}^{m} + r_{1o}^{m} = \frac{\zeta_s^1(k_o r_o)}{\zeta_s^2(k_o r_o)} \cdot \frac{i\frac{k_o}{k_1}\, Z_s^2(k_o r_o) + k_o r_o\, \zeta_s^2(k_o r_o)}{-i\frac{k_o}{k_1}\, Z_s^1(k_o r_o) + k_o r_o\, \zeta_s^1(k_o r_o)} \tag{1o.1o}$$

Für den Reflexionsfaktor erhält man:

$$R_s^m = \frac{k_o r_o\, i\, \mathrm{tg} k_1 d_1\, \zeta_s^2(k_o r_o) + i\,\frac{k_o}{k_1}\, Z_s^2(k_o r_o)}{-k_o r_o\, i\, \mathrm{tg} k_1 d_1\, \zeta_s^1(k_o r_o) - i\,\frac{k_o}{k_1}\, Z_s^1(k_o r_o)} \tag{1o.11}$$

Führt man hier wieder die Bedingung der Reflexionsfreiheit ein, so folgt:

$$R_s^m = -\frac{ik_o r_o \zeta_s^2(k_o r_o) + Z_s^2(k_o r_o)}{ik_o r_o \zeta_s^1(k_o r_o) + Z_s^1(k_o r_o)} = \frac{\zeta_s^2(k_o r_o)}{\zeta_s^1(k_o r_o)} \cdot \frac{\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_s^2(x) \quad + i}{\frac{d}{dx}\ln x\, \zeta_s^1(x)_{k_o r_o} + i} = R_s^e \tag{1o.12}$$

Wir haben das wichtige Ergebnis erhalten, daß im Grenzfall $k_o r_o \gg 1$, $k_2 \gg k_o$ die Reflexionsfaktoren im TE- und TM-Fall gleich groß werden. Sie sind unabhängig von speziellen Materialkonstanten geworden. Durch die Forderung $k_2 \gg k_o$ sind die Reflexionsfaktoren zunächst unabhängig von k_2 geworden (1o.2). Durch die Bedingung der Reflexionsfreiheit sind sie dann noch unabhängig von k_1 geworden.

1o.2 Folgerungen für Sender und Beobachter $\longrightarrow \infty$

Wir wollen zunächst den Streuanteil des Fernfeldes bestimmen (Beobachter $\longrightarrow \infty$) und gleichzeitig mit dem Sender $\longrightarrow \infty$ gehen (Übergang zu ebener Welle). Aus (3.47) bis (3.5o) folgt dann mit den Näherungen

$$Z_n^1(k_o b) \longrightarrow e^{ik_o b}\, e^{-in\pi/2} \tag{1o.13}$$

$$\zeta_n^1(k_o b) \longrightarrow \frac{e^{ik_o b}}{ik_o b}\, e^{-in\pi/2} \tag{1o.14}$$

und $\vartheta \to \pi - \vartheta$, d.h. $P_n^1(\cos\vartheta) \Rightarrow (-1)^n P_n^1(\cos\vartheta)$:

$$U^{e,m} \longrightarrow U_s^{e,m} = \frac{k_o^2}{2} \frac{e^{ik_o b}}{ik_o b} \frac{e^{ik_o r}}{ik_o r} S_\infty^{e,m}(\vartheta) \tag{1o.15}$$

$$V^{e,m} \longrightarrow V_s^{e,m} = \frac{k_o^2}{2} \frac{e^{ik_o b}}{ik_o b} \frac{e^{ik_o r}}{ik_o r} S_\infty^{e,m}(\vartheta) \tag{1o.16}$$

wobei

$$S_\infty^{e,m}(\vartheta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} R_n^{e,m} P_n^1(\cos\vartheta) \tag{1o.17}$$

Aus (3.51) bis (3.54) erhält man für die Komponenten des Fernfeldes:

$$E_\vartheta \longrightarrow Z_o H_\varphi \longrightarrow - \frac{e^{ik_o b}}{b} \frac{e^{ik_o r}}{r} \cos\varphi \; S_\parallel^\infty(\vartheta) \tag{1o.18}$$

$$- E_\varphi \longrightarrow Z_o H_\vartheta \longrightarrow - \frac{e^{ik_o b}}{b} \frac{e^{ik_o r}}{r} \sin\varphi \; S_\perp^\infty(\vartheta) \tag{1o.19}$$

mit

$$S_\parallel^\infty(\vartheta) = \frac{\partial S_\infty^e}{\partial\vartheta} + \frac{S_\infty^m}{\sin\vartheta} = - \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(R_n^e \frac{d^2}{d\vartheta^2} P_n(\cos\vartheta) + \frac{R_n^m}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta) \right) \tag{1o.2o}$$

$$S_\perp^\infty(\vartheta) = \frac{S_\infty^e}{\sin\vartheta} + \frac{\partial S_\infty^m}{\partial\vartheta} = - \sum \frac{2n+1}{n(n+1)} \left(\frac{R_n^e}{\sin\vartheta} \frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta) + R_n^m \frac{d^2}{d\vartheta^2} P_n(\cos\vartheta) \right) \tag{1o.21}$$

$\parallel$ und $\perp$ beziehen sich auf die elektrische Feldstärke und bezeichnen die zur Beobachtungsebene parallelen und senkrechten Komponenten.

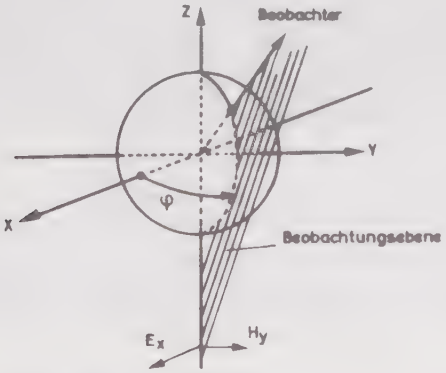


Abb. 18 Beobachtungsebene

Das Streufeld ist im allgemeinen elliptisch polarisiert. Nur wenn die Beobachtungsebene parallel oder senkrecht zur Schwingungsrichtung (E-Vektor) des einfallenden Feldes ausgerichtet ist ($\varphi = 0, \pi/2$), ist das Streufeld linear polarisiert.

Nun ist in dem hier betrachteten Grenzfall $R_n^e = R_n^m$ (der Index 03 ist der Einfachheit halber weggelassen worden). Es ist somit $S_{\parallel}(\vartheta) = S_{\perp}(\vartheta) = S(\vartheta)$ und für die Polarisation erhält man:

$$-\frac{E_\vartheta}{E_\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \qquad (10.22)$$

Das Streufeld ist also überall linear polarisiert und ändert in Abhängigkeit vom Azimutwinkel φ nur seine Polarisationsrichtung.

Für $\vartheta = \pi$ wird $\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta} P_n(\cos\vartheta)\Big|_{\vartheta=\pi} = -\frac{d^2}{d\vartheta^2} P_n(\cos\vartheta)\Big|_{\vartheta=\pi} = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}$

Somit erhält man:

$$S_{\parallel}^{\infty}(\vartheta) = S_{\perp}^{\infty}(\vartheta) = -\sum \frac{2n+1}{n(n+1)}(-1)^n \frac{n(n+1)}{2}\left[R_n^e - R_n^m\right] = 0 \qquad (10.23)$$

In Rückwärtsrichtung tritt also eine exakte Nullstelle auf, während in allen anderen Raumrichtungen das Feld streng linear polarisiert ist.

Diese Aussagen decken sich mit den allgemeinen Aussagen C l a u s M ü l l e r s [16] über elektromagnetische Strahlungsfelder:

1.) Wenn alle Punkte in der Umgebung eines beliebigen Punktes einer Strahlungscharakteristik linear polarisierte Stellen sind, so ist die gesamte Strahlungscharakteristik linear polarisiert.
2.) Jede Strahlungscharakteristik besitzt mindestens eine Stelle linearer Polarisation und auch mindestens eine Stelle zirkularer Polarisation.

Eine Folgerung aus diesen beiden Aussagen ist die Aussage, daß bei einer Strahlungscharakteristik, die nur linear polarisierte Stellen hat, die zirkular polarisierten Stellen mit den Nullstellen zusammenfallen.

Wenn wir also in (1o.22) festgestellt haben, daß das Streufeld überall linear polarisiert ist, so liefert die Gleichung (1o.23) nur die Bestätigung einer zwingenden Notwendigkeit.

1o.3 Pole des Reflexionsfaktors

Ersetzt man in (1o.12) die Hankelfunktionen durch ihre Debeyeschen Näherungen, so erhält man links von der Nullstellenkurve:

$$R_s = e^{-2i(f_{oo} - \pi/4)} \frac{\sin\tau_{oo} - 1}{\sin\tau_{oo} + 1} \qquad (1o.24)$$

In der Umgebung der Nullstellenkurve gilt:

$$R_s = \frac{e^{-i(f_{oo} - \pi/4)}}{2i\sin(f_{oo} - \pi/4)} \cdot \frac{\sin\tau_{oo} - 1}{i\sin\tau_{oo}\, tg(f_{oo} + \pi/4) + 1} \qquad (1o.25)$$

Dabei ist $f_{oo} = k_o r_o (\sin\tau_{oo} - \tau_{oo}\cos\tau_{oo})$.

Als Polstellengleichung erhalten wir somit (Index oo ist weggelassen):

$$i\sin\tau\, tg\, k_o r_o\{(\sin\tau - \tau\cos\tau) + \pi/4\} + 1 = o \qquad (1o.26)$$

Diese transzendente Gleichung in τ zu lösen, erfordert aber immer noch einige Schwierigkeiten. Da diese Gleichung in der s-Ebene in der Umgebung der Nullstellenkurve der Hankelfunktionen gilt, können wir wie bei der Bestimmung der Nullstellen der Hankelfunktionen ([2], [6], [14], [19]) $|\tau| \ll 1$ annehmen und daher auch $|\sin\tau| << 1$ setzen.

Zunächst wird (1o.26) umgeformt. Es ist nach dem Additionstheorem der Tangensfunktion:

$$tg\{k_o r_o(\sin\tau - \tau\cos\tau) + \frac{\pi}{4}\} = \frac{1 + tg\{k_o r_o(\sin\tau - \tau\cos\tau)\}}{1 - tg\{k_o r_o(\sin\tau - \tau\cos\tau)\}} = -\frac{1}{i\sin\tau}$$

oder $$tg\{k_o r_o(\sin\tau - \tau\cos\tau)\} \approx 1 + 2i\sin\tau$$

Nun ersetzen wir $\sin\tau$ und $\cos\tau$ durch die beiden ersten Glieder ihrer Reihenentwicklung und erhalten:

$$\operatorname{tg}\frac{k_o r_o}{3}\tau^3 = 1 + i\left(2\tau - \frac{\tau^3}{3}\right)$$

$$\frac{k_o r_o}{3}\tau^3 = \operatorname{arctg}\left\{1 + i\left(2\tau - \frac{\tau^3}{3}\right)\right\}$$

Nun ist aber für $|x| \ll 1$:

$$\operatorname{arctg}(1+x) = \operatorname{arctg}(1) + x\left.\frac{d}{dx}\operatorname{arctg}(x)\right|_{x=1} = -\frac{\pi}{4}(4\nu - 1) + \frac{x}{2}, \quad \nu = 1,2,\ldots$$

und daher

$$\frac{k_o r_o}{3}\tau^3 = -\frac{\pi}{4}(4\nu - 1) + \frac{i}{2}\left(2\tau - \frac{\tau^3}{3}\right)$$

oder

$$\tau^3 - \frac{3i}{k_o r_o}\frac{1}{1 + \frac{i}{2k_o r_o}}\tau + \frac{1}{k_o r_o}\frac{3\pi}{4}(4\nu - 1)\frac{1}{1 + \frac{i}{2k_o r_o}} = 0$$

Da wir $k_o r_o \gg 1$ wählen, können wir weiter vereinfachen und schreiben:

$$\tau^3 - \frac{3i}{k_o r_o}\tau + \frac{1}{k_o r_o}\frac{3\pi}{4}(4\nu - 1) = 0, \quad \nu = 1,2,\ldots \tag{1o.27}$$

Andererseits folgt aus $\cos\tau = \dfrac{s + \frac{1}{2}}{k_o r_o} = 1 - \dfrac{\tau^2}{2}$

$$s + \frac{1}{2} = k_o r_o - \frac{k_o r_o}{2}\tau^2 \tag{1o.28}$$

Die Wurzeln von (1o.27) in (1o.28) eingesetzt, ergeben eine 3-fache Schar von ν Polstellen. Die den Polstellen entsprechenden Residuenwellen können sich nur gedämpft und in positiver r-Richtung ausbreiten, daher haben nur die Polstellen einen Sinn, die im ersten Quadranten liegen (positiver Imaginärteil).

In (1o.27) liegt eine kubische Gleichung der Form

$$\tau^3 + 3p\tau + 2q = 0 \tag{1o.29}$$

vor mit

$$p = -\frac{i}{k_o r_o} \tag{1o.3o}$$

$$q = \frac{1}{2}\frac{1}{k_o r_o} \cdot \frac{3\pi}{4} \cdot (4\nu - 1) \tag{1o.31}$$

Allgemein lauten die drei Wurzeln dieser kubischen Gleichung:

$$\left.\begin{aligned} \tau_1 &= u + v \\ \tau_2 &= e^{i2\pi/3}\, u + e^{-i2\pi/3}\, v \\ \tau_3 &= e^{-i2\pi/3} u + e^{i2\pi/3} v \end{aligned}\right\} \tag{1o.32}$$

mit

$$\left.\begin{matrix} u \\ v \end{matrix}\right\} = (-q \pm \sqrt{q^2 + p^3})^{1/3} = (-q)^{1/3}(1 \pm \sqrt{1+p^3/q^2})^{1/3} \tag{1o.33}$$

Nun ist

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{i}{k_o r_o}\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 \frac{1}{(4\nu-1)^2} \tag{1o.34}$$

klein gegen 1. Wir können daher $\sqrt{1+p^3/q^2}$ ersetzen durch $1+\frac{1}{2}p^3/q^2$. Dadurch erhalten wir

$$u = (-2q)^{1/3}\left(1+\frac{1}{4}\frac{p^3}{q^2}\right)^{1/3} \tag{1o.35}$$

$$v = \frac{p}{(2q)^{1/3}} \tag{1o.36}$$

Nun ist $\left|\frac{v}{u}\right| \sim \frac{1}{(k_o r_o)^{1/3}} \cdot \frac{1}{(4\nu-1)^{2/3}} \ll 1$ wegen $k_o r_o \gg 1$. In den Lösungen (1o.32) können wir daher den Beitrag von v gegen den Beitrag von u vernachlässigen. In (1o.35) ziehen wir nun die 3. Wurzel und entwickeln gleichzeitig die rechte Klammer, da nach (1o.34) $p^3/q^2 \ll 1$ ist.

Es ist:

$$u = |2q|^{1/3}\left(1+\frac{1}{12}\frac{p^3}{q^2}\right)\begin{cases} -1 \\ e^{i\pi} \\ e^{-i\pi/3} \end{cases} \tag{1o.37}$$

Wir müssen nun den Zweig auswählen, der in (1o.28) eingesetzt Pole

im ersten Quadranten liefert. Dies ist nur möglich, wenn wir den Zweig mit negativem Imaginärteil zusammen mit $\tau_1 = u$ wählen:

$$\tau_1 = \tau_\nu = u = \frac{e^{-i\,\pi/3}}{(k_o r_o)^{1/3}} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{1/3} (4\nu-1)^{1/3} \cdot \left(1+ \frac{i}{12}\frac{1}{k_o r_o}\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 \frac{1}{(4\nu-1)^2}\right) \tag{1o.38}$$

Mit (1o.28) erhalten wir die endgültige Bestimmungsgleichung der Polstellen:

$$s_\nu + \frac{1}{2} = n_\nu = k_o r_o + \frac{(k_o r_o)^{1/3}}{2} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} (4\nu-1)^{2/3} e^{i\,\pi/3} (1+f_\nu) \tag{1o.39}$$

mit

$$f_\nu = \frac{i}{6}\frac{1}{k_o r_o}\left(\frac{8}{3\pi}\right)^2 \frac{1}{(4\nu-1)^2} \tag{1o.4o}$$

Bis auf den Faktor $(1+f_\nu)$ liegt dieselbe Gleichung vor wie bei der ideal leitenden Kugel. Es ist $|f_\nu| \ll 1$; daher liegen die gesuchten Polstellen in der Nähe der entsprechenden Polstellen der ideal leitenden Kugel, denen sie sich mit wachsendem Index ν immer mehr nähern. Die Annäherung ist umso besser, je größer $k_o r_o$ ist.

Betrachtet man den Reflexionsfaktor nach Gleichung (1o.25), so liegt die Vermutung nahe, daß bei $\sin(f_{oo} - \frac{\pi}{4}) = o$ eine weitere Serie von Polen liegt. Eine einfache Rechnung zeigt aber, daß bei $f_{oo} = \frac{\pi}{4}$ der Reflexionsfaktor den Wert $R_{o3} = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sin \tau_{oo}}\right)\Big|_{f_{oo}=\frac{\pi}{4}}$ annimmt, also endlich bleibt. Die einzig möglichen Pole liegen also an den durch (1o.39) gegebenen Stellen.

11. Umformung der Residuenreihen

Wir haben eingangs erwähnt, daß wir im Hinblick auf die praktische Anwendung den Sender und den Empfänger sehr weit von der Kugel wegrücken, praktisch also zur ebenen Welle und zum Fernfeld der Kugel übergehen. Dadurch verkleinert sich der Bereich des geometrischen Schattens hinter der Kugel immer mehr (siehe Abb. 19). Der Winkel $\vartheta = \vartheta_{grenz}$, der zur geometrischen Schattengrenze

gehört, rückt immer näher an den Winkel $\vartheta = \pi$ heran, den er ganz erreicht, wenn der Sender nach ∞ gewandert ist. Der Vollständigkeit halber werden wir aber auch die Feldkomponenten im geometrischen Schatten angeben, also auch den Fall behandeln, daß der Sender nicht zu weit von der Kugel entfernt ist.

Zunächst ersetzen wir in den Reihen (6.14) bis (6.17) die Produkte der dort auftretenden Hankelfunktionen und ihrer Ableitungen durch die entsprechenden asymptotischen Darstellungen aus Kapitel 7. Es ist dann:

$$Z_s^1(k_o b) Z_s^1(k_o r) = \sqrt{\sin\tau}_r \sqrt{\sin\tau}_b \, e^{if_b} e^{if_r} e^{-i\pi/2} \tag{11.1}$$

$$\zeta_s^1(k_o b) \zeta_s^1(k_o r) = \frac{1}{k_o r} \frac{1}{k_o b} \frac{1}{\sqrt{\sin\tau}_r} \frac{1}{\sqrt{\sin\tau}_b} e^{if_b} e^{if_r} e^{-i\pi/2} \tag{11.2}$$

$$\zeta_s^1(k_o b) Z_s^1(k_o r) = \frac{i}{k_o b} \sqrt{\frac{\sin\tau_r}{\sin\tau_b}} e^{if_b} e^{if_r} e^{-i\pi/2} \tag{11.3}$$

$$Z_s^1(k_o b) \zeta_s^1(k_o r) = \frac{i}{k_o r} \sqrt{\frac{\sin\tau_b}{\sin\tau_r}} e^{if_b} e^{if_r} e^{-i\pi/2} \tag{11.4}$$

Hierin ist ($s_\nu + \frac{1}{2} = n_\nu$):

$$f_b = k_o b(\sin\tau_b - \tau_b \cos\tau_b) = k_o b \sqrt{1-(\frac{n_\nu}{k_o b})^2} - n_\nu \arccos \frac{n_\nu}{k_o b} \tag{11.5}$$

$$f_r = k_o r(\sin\tau_r - \tau_r \cos\tau_r) = k_o r \sqrt{1-(\frac{n_\nu}{k_o r})^2} - n_\nu \arccos \frac{n_\nu}{k_o r} \tag{11.6}$$

mit

$$\sin\tau_b = \sqrt{1 - (\frac{n_\nu}{k_o b})^2} \tag{11.7}$$

$$\sin\tau_r = \sqrt{1 - (\frac{n_\nu}{k_o r})^2} \tag{11.8}$$

Da $n_\nu \approx k_o r_o$, können wir im Amplitudenteil von (11.1) bis (11.4) für $r, b \gg r_o$ $\sin\tau_b \approx \sin\tau_r \approx 1$ setzen. Damit erhalten wir:

$$Z^1_{s_\nu}(k_o b) Z^1_{s_\nu}(k_o r) = -\,\bullet \qquad (11.9)$$

$$\zeta^1_{s_\nu}(k_o b) \zeta^1_{s_\nu}(k_o r) = \frac{1}{k_o r}\frac{1}{k_o b}\,\bullet \qquad (11.10)$$

$$\zeta^1_{s_\nu}(k_o b) Z^1_{s_\nu}(k_o r) = \frac{i}{k_o b}\,\bullet \qquad (11.11)$$

$$Z^1_{s_\nu}(k_o b) \zeta^1_{s_\nu}(k_o r) = \frac{i}{k_o r}\,\bullet \qquad (11.12)$$

$$\bullet\, e^{i f_b}\, e^{i f_r}\, e^{-i\pi/2}$$

Setzen wir (11.9) bis (11.12) in (6.14) bis (6.17) ein und bilden wir damit (3.51) bis (3.54), so erhalten wir

$$E_\vartheta = \cos\varphi \left(\frac{\partial U^\bullet}{\partial \vartheta} + \frac{V^m}{\sin\vartheta}\right) \longrightarrow Z_o H_\varphi = \cos\varphi \left(\frac{\partial V^\bullet}{\partial \vartheta} + \frac{U^m}{\sin\vartheta}\right)$$
$$= \cos\varphi \frac{\pi_\bullet i^{\pi/2}}{2rb} \sum_{\nu=1,2,\ldots} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \frac{e^{i f_r} e^{i f_b}}{\sin\pi s_\nu} \left[F^\bullet \frac{d^2}{d\vartheta^2}\bullet + \frac{F^m}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\right] P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) \qquad (11.13)$$

$$-E_\varphi = \sin\varphi \left(\frac{\partial V^m}{\partial \vartheta} + \frac{U^\bullet}{\sin\vartheta}\right) \longrightarrow Z_o H_\vartheta = \sin\varphi \left(\frac{\partial U^m}{\partial \vartheta} + \frac{V^\bullet}{\sin\vartheta}\right)$$
$$= \sin\varphi \frac{\pi_\bullet i^{\pi/2}}{2rb} \sum_{\nu=1,2,\ldots} \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \frac{e^{i f_r} e^{i f_b}}{\sin\pi s_\nu} \left[F^m \frac{d^2}{d\vartheta^2}\bullet + \frac{F^\bullet}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\right] P_{s_\nu}(\cos\vartheta) \qquad (11.14)$$

Diese Gleichungen beschreiben das elektromagnetische Feld, das von der Beugung an der Kugel herrührt. Um zu numerischen Resultaten zu gelangen, sind für die Kugelfunktionen zweckmäßige asymptotische Darstellungen einzusetzen. Wir werden im nächsten Kapitel sehen, daß wir so zu verschiedenen Felddarstellungen kommen, die entweder im Licht- oder im Schattengebiet konvergieren.

11.1 Empfänger im Schattengebiet

Im Gebiet des geometrischen Schattens benutzen wir die für $|s_\nu \cdot \sin\vartheta| \gg 1$ geltende asymptotische Darstellung:

$$P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) \longrightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi s_\nu \cdot \sin\vartheta}} \cos\left\{(s_\nu + \tfrac{1}{2})(\pi - \vartheta) - \frac{\pi}{4}\right\} \qquad (11.15$$

Mit der Substitution $s_\nu + \frac{1}{2} = n_\nu$ erhalten wir:

$$\frac{P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin \pi s_\nu} \longrightarrow -\sqrt{\frac{2}{\pi n_\nu \sin\vartheta}} \frac{1}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left\{ e^{in_\nu(2\pi-\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} + e^{in_\nu\vartheta+i\frac{\pi}{4}} \right\} \quad (11.16)$$

und daraus, wenn wir nur nach dem schnell veränderlichen Phasenteil differenzieren:

$$\frac{d}{d\vartheta}\frac{P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin \pi s_\nu} \longrightarrow \sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi \cdot \sin\vartheta}} \frac{i}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left\{ e^{in_\nu(2\pi-\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} - e^{in_\nu\vartheta+i\frac{\pi}{4}} \right\} \quad (11.17)$$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\frac{P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)}{\sin \pi s_\nu} \longrightarrow n_\nu \sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi \cdot \sin\vartheta}} \frac{1}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left\{ e^{in_\nu(2\pi-\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} + e^{in_\nu\vartheta+i\frac{\pi}{4}} \right\} \quad (11.18)$$

Setzen wir diese asymptotischen Darstellungen z.B. in (11.13) ein, so erhalten wir:

$$\frac{1}{\sin\pi s_\nu}\left[F_\nu^e \frac{d^2}{d\vartheta^2} P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) + \frac{F_\nu^m}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta} P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)\right]$$

$$\longrightarrow \sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi \cdot \sin\vartheta}} \frac{n_\nu}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left[F_\nu^e (e^{i\ldots} + e^{i\ldots}) + \frac{iF_\nu^m}{n_\nu \sin\vartheta} (e^{i\ldots} - e^{i\ldots}) \right]$$

Nun können wir den Beitrag des letzten Teils in der eckigen Klammer wegen $|n_\nu \sin\vartheta| \gg 1$ gegen den ersten vernachlässigen. Ein entsprechendes Ergebnis erhalten wir mit (11.14). Es ist also:

$$E_\vartheta \longrightarrow Z_o H_\varphi \longrightarrow \frac{\pi e^{i\pi/2}}{2rb} \sum_\nu \frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \frac{e^{if_r} e^{if_b}}{1+e^{2i\pi n}} n \sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi \sin\vartheta}} \left(e^{in_\nu(2\pi-\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} + e^{in_\nu\vartheta + i\frac{\pi}{4}} \right) \quad (11.19)$$

Nun ist $\frac{2s_\nu+1}{s_\nu(s_\nu+1)} \cdot n_\nu = 2\frac{(s_\nu+1/2)^2}{s_\nu(s_\nu+1)} \approx 2$. Weiter ist $\sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi \sin\vartheta}} \sqrt{\frac{2k_o r_o}{\pi \sin\vartheta}}$

Damit erhalten wir, wenn wir f_r und f_b durch (11.5) und (11.6) ersetzen:

$$E_\vartheta \longrightarrow Z_o H_\varphi \longrightarrow \frac{1}{rb}\sqrt{\frac{2\pi k_o r_o}{\sin\vartheta}} \sum_\nu \frac{F_\nu^e}{1+e^{2i\pi n_\nu}} e^{ik_o r\sqrt{1-(n_\nu/k_o r)^2}} e^{ik_o b\sqrt{1-(n_\nu/k_o b)^2}}$$

$$\cdot e^{in_\nu(2\pi - \arccos\frac{n_\nu}{k_o r} - \arccos\frac{n_\nu}{k_o b}) + i\frac{\pi}{4}} + e^{in_\nu(\vartheta - \arccos\frac{n_\nu}{k_o r} - \arccos\frac{n_\nu}{k_o b}) + i\frac{3\pi}{4}} \quad (11.20)$$

Wir führen jetzt noch die Abkürzungen

$$\vartheta_{grenz} = \arccos \frac{n_\nu}{k_o r} + \arccos \frac{n_\nu}{k_o b} \tag{11.21}$$

und

$$\Phi_o = k_o r \sqrt{1-(\frac{n_\nu}{k_o r})^2} + k_o b \sqrt{1-(\frac{n_\nu}{k_o b})^2} \tag{11.22}$$

ein und benutzen die für $Im(n_\nu) > o$ zulässige Reihenentwicklung

$$\frac{1}{1+e^{2i\pi n_\nu}} = \sum_{k=o}^{\infty} e^{i2k\pi n_\nu} e^{ik\pi} \tag{11.23}$$

und erhalten die endgültige Darstellung für die Feldstärken:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &\rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi &\rightarrow Z_o H_\vartheta \rightarrow \sin\varphi \end{aligned}\right\} \cdot \frac{1}{rb}\sqrt{\frac{2\pi k_o r_o}{\sin\vartheta}} \sum_\nu F_\nu^{e,m} e^{i\Phi_o}$$
$$\cdot\Big(\sum_k e^{in_\nu(2\pi-\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k+\frac{1}{4})\pi} + \sum_k e^{in_\nu(\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k+\frac{3}{4})\pi}\Big) \tag{11.24}$$

wobei für E_ϑ und $Z_o H_\varphi$ F_ν^e zu nehmen ist, während F_ν^m für E_φ und $Z_o H_\vartheta$ gilt.

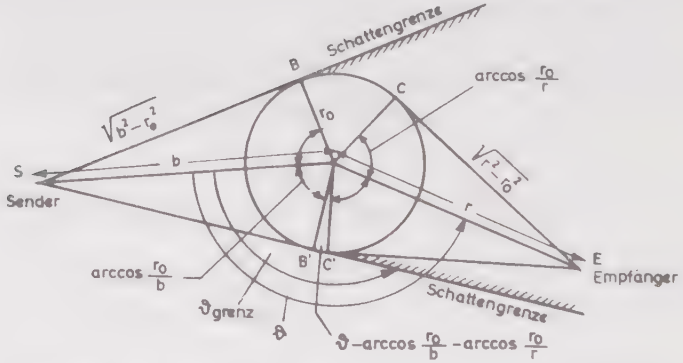


Abb. 19 Laufwege der Kriechwellen

Gleichung (11.24) läßt sich leicht physikalisch deuten. Setzen wir zunächst $k = o$ und betrachten wir die dort auftretenden

Exponentialfunktionen:

$$\exp\left[i(k_o b \sqrt{1-(\frac{n_\nu}{k_o b})^2} + k_o r \sqrt{1-(\frac{n_\nu}{k_o r})^2}) \right] \cdot$$
$$\cdot \left\{ \exp\left[i n_\nu (2\pi - \vartheta - \vartheta_{gr}) + i \frac{\pi}{4} \right] + \exp\left[i n_\nu (\vartheta - \vartheta_{gr}) + i \frac{3\pi}{4} \right] \right\} \qquad (11.25)$$

Da n_ν für kleine ν in der Nähe von $k_o r_o$ liegt, setzen wir für eine qualitative Betrachtung $n_\nu = k_o r_o$. Dann entspricht dem Exponenten der ersten Exponentialfunktion eine Phasenänderung, die ein Strahl erleidet, welcher (siehe Abb. 19) von S ausgeht, den Kreis (die Kugel) in B bzw. B' tangierend berührt und ihn in C bzw. C' in Richtung auf den Punkt E wieder tangierend verläßt. Die Exponenten der Exponentialfunktionen in der geschweiften Klammer können wir als Phasenänderung deuten, die zwei Strahlen erleiden, die entlang der Kreisbögen von B nach C bzw. von B' nach C' laufen. Da diese Strahlen oder Wellen auf der Oberfläche der Kugel entlang-"kriechen", werden sie "Kriechwellen" genannt.

Weil jedoch $n_\nu = \alpha_\nu + i\beta_\nu$ mit $\alpha_\nu > k_o r_o$ ist (den Einfluß des Imaginärteiles β_ν auf die Wurzel und den arccos können wir bei dieser qualitativen Betrachtung vernachlässigen), laufen die Strahlen nicht unmittelbar auf der Kugeloberflache, sondern halten einen Abstand $Re(n_\nu) - k_o r_o$ von ihr ein. Wegen $\beta_\nu > o$ sind diese Kriechwellen mit wachsendem ν zunehmend starker gedämpft.

Die Summe (11.24) konvergiert jedoch nur dann, wenn (zunächst noch $k = o$) $2\pi - \vartheta - \vartheta_{gr} > o$ bzw. $\vartheta < 2\pi - \vartheta_{gr}$ für den oberen Strahl (Abb.19) und $\vartheta - \vartheta_{gr} > o$ bzw. $\vartheta > \vartheta_{gr}$ für den unteren Strahl ist ($n_\nu = k_o r_o$), d.h. wenn die Kriechstrecken positiv sind. Dies ist aber nur dann möglich, wenn sich der Empfänger im Bereich des geometrischen Schattens befindet. Der in (11.21) definierte Winkel ist demnach für $n_\nu = k_o r_o$ der zur geometrischen Schattengrenze gehörende Winkel.

Setzen wir nun $k = 1,2,\ldots$, so gehören dazu nach unserer eben entwickelten Vorstellung Strahlen, die die Kugel erst einmal, zweimal,...

umlaufen haben, ehe sie die Kugel wieder in C bzw. C' tangierend in Richtung zum Empfänger verlassen.

Da die Kriechstrecke mit wachsendem Kugelradius zunimmt, wird die Dämpfung der Kriechwellen mit wachsendem Kugelradius immer größer und das gebeugte Feld immer kleiner. Ebenso vermindert sich das gebeugte Feld, wenn der Empfänger tiefer in den geometrischen Schatten eintaucht, da auch dann die Kriechstrecken immer größer werden. Allerdings kommt es bei $\vartheta = \pi$ wieder zu einem Anwachsen des Feldes, da sich in dieser Richtung (Abb. 19) die beiden Strahlen mit gleicher Phase überlagern.+) Dort ist jedoch wegen $\frac{1}{\sqrt{\sin\vartheta}}$ die asymptotische Darstellung (11.15) unbrauchbar. Für $\vartheta \approx \pi$, $n_\nu \gg 1$ und $|n_\nu \vartheta|$ nicht $\gg 1$ haben wir folgende asymptotische Darstellung:

$$P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) \approx J_o(n_\nu(\pi-\vartheta)) \tag{11.26}$$

Mit Hilfe der für die Besselfunktionen geltenden Rekursionsformeln

$$J_o(x) = -J_1(x),\quad \partial J_1(x) = J_o(x) - J_2(x),\quad \frac{2}{x}J_1(x) = J_o(x) + J_2(x) \tag{11.27}$$

ist dann:

$$\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) \approx \frac{n_\nu}{\pi-\vartheta}J_o = -\frac{n_\nu}{\pi-\vartheta}J_1$$

$$= -\frac{n_\nu^2}{2}\left(J_o(n_\nu(\pi-\vartheta)) + J_2(n_\nu(\pi-\vartheta))\right) \tag{11.28}$$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) \approx -\frac{n_\nu^2}{2}\left(J_o(n_\nu(\pi-\vartheta)) - J_2(n_\nu(\pi-\vartheta))\right) \tag{11.29}$$

Diesmal sind in (11.13) und (11.14) beide Terme von derselben Größenordnung. Setzt man (11.28) und (11.29) dort ein, so erhält man:

$$\left.\begin{matrix} E_\vartheta \rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi \rightarrow Z_o H \rightarrow \sin\varphi \end{matrix}\right\} \frac{\pi k_o r_o}{r \cdot b} \sum_\nu \frac{e^{i\phi_o} e^{in_\nu(\pi-\vartheta_{gr})} + i\frac{\pi}{2}}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \cdot \left\{F_\nu^e(J_o - J_2) + F_\nu^m(J_o + J_2)\right\} \tag{11.30}$$

+) Dies entspricht dem aus der Wellenausbreitung um kugelförmige Erde bekannten Antipoden-Effekt.

Wählen wir $k_2 \gg k_o$, so erhalten nach Kapitel 10 die Reflexionsfaktoren im TE- und TM-Fall gleiches Aussehen, also ist auch $F_\nu^{\perp} = F_\nu^{\parallel} = F_\nu$. In diesem Spezialfall ist für $|n_\nu \sin\vartheta| \gg 1$:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &\rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi &\rightarrow Z_o H_\vartheta \rightarrow \sin\varphi \end{aligned}\right\} \frac{2\pi k_o r_o}{rb} \sum_\nu F_\nu e^{i\phi_{o_e}} \Big(\sum_k e^{in_\nu(2\pi-\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k+\frac{1}{4})\pi} + \sum_k e^{in_\nu(\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k+\frac{3}{4}\pi)} \Big) \qquad (11.31)$$

und für $|n_\nu \sin\vartheta|$ nicht $\gg 1$:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &\rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi &\rightarrow Z_o H_\vartheta \rightarrow \sin\varphi \end{aligned}\right\} \frac{2\pi k_o r_o}{rb} \sum_\nu \frac{F_\nu e^{i\phi_{o_e}} in\,(\pi-\vartheta_{gr})+i\pi/2}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \cdot J_o(n_\nu(\pi-\vartheta)) \qquad (11.32)$$

Da $J(o) = 1$, ist für $\vartheta = \pi$, also im Zentrum des geometrischen Schattens, immer ein, wenn auch sehr kleines Feld vorhanden.

Während für k_2 nicht $\gg k_o$ das gebeugte Feld im Gebiet des geometrischen Schattens im allgemeinen elliptisch polarisiert ist, hat es für $k_2 \gg k_o$ überall streng lineare Polarisation.

11.2 Empfänger im Lichtgebiet

Wandert der Empfänger in Abb. 19 über die Schattengrenze hinaus in das Gebiet, wo direkte Sichtverbindung mit dem Sender besteht, so konvergiert die Residuenreihe (11.24) nicht mehr, wie im letzten Kapitel nachgewiesen worden ist. Konvergenz können wir wieder erzeugen, wenn wir nach F r a n z [11], [12], [13] für die Kugelfunktionen folgende Aufspaltung benutzen:

$$P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) = e^{i\pi s_\nu} P_{s_\nu}(\cos\vartheta) - 2i \sin\pi s_\nu \, Q^2_{s_\nu}(\vartheta) \qquad (11.33)$$

($Q^2_{s_\nu}(\vartheta)$ = Kugelfunktionen zweiter Art). Diese Beziehung in die Reihen (6.14) bis (6.17) für die Potentiale eingesetzt, spaltet

jedes Potential in zwei Teilpotentiale auf. Es wird sich ergeben, daß das Teilpotential, das $e^{i\pi s_\nu} P_{s_\nu}(\cos\vartheta)$ enthält, wieder Kriechwellen liefert, während das andere Teilpotential die geometrische Optik liefert.

11.2.1 Residuenreihen

Zur Berechnung der Residuenreihen können wir von (11.13) und (11.14) ausgehen, wenn wir dort $P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)$ durch $e^{i\pi s_\nu} P_{s_\nu}(\cos\vartheta)$ ersetzen. Zunächst gilt für $|s_\nu \cdot \sin\vartheta| \gg 1$ wieder:

$$P_{s_\nu}(\cos\vartheta) \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi s_\nu \cdot \sin\vartheta}} \cos\left\{(s_\nu + \frac{1}{2})\vartheta - \frac{\pi}{4}\right\} \qquad (11.34)$$

Mit der Substitution $s_\nu + \frac{1}{2} = n_\nu$ erhalten wir:

$$\frac{e^{i\pi s_\nu} P_{s_\nu}(\cos\vartheta)}{\sin\pi s_\nu} \rightarrow \sqrt{\frac{2}{\pi n_\nu \sin\vartheta}} \frac{e^{i\pi/2}}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left\{e^{in_\nu(2\pi+\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} + e^{in_\nu(2\pi-\vartheta)+i\frac{\pi}{4}}\right\} \qquad (11.35)$$

und daraus, wenn wir wieder nur nach dem schnell veränderlichen Phasenteil differenzieren:

$$\frac{d}{d\vartheta} \frac{e^{i\pi s_\nu} P_{s_\nu}(\cos\vartheta)}{\sin\pi s_\nu} \rightarrow -\sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi\sin\vartheta}} \frac{1}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left\{e^{in_\nu(2\pi+\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} - e^{in_\nu(2\pi-\vartheta)+i\frac{\pi}{4}}\right\} \qquad (11.36)$$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} \frac{e^{i\pi s_\nu} P_{s_\nu}(\cos\vartheta)}{\sin\pi s_\nu} \rightarrow -n\sqrt{\frac{2n_\nu}{\pi\sin\vartheta}} \frac{e^{i\pi/2}}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left\{e^{in(2\pi+\vartheta)-i\frac{\pi}{4}} + e^{in(2\pi-\vartheta)+i\frac{\pi}{4}}\right\} \qquad (11.37)$$

Die weitere Durchrechnung verläuft analog zu der Durchrechnung im Schattengebiet. Wir erhalten also mit denselben Abkürzungen ϕ_o und ϑ_{gr} wie in (11.24) für die Feldstärken des Beugungsanteiles:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &\rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi &\rightarrow Z_o H_\vartheta \rightarrow \sin\varphi \end{aligned}\right\} \frac{1}{rb}\sqrt{\frac{2\pi k_o r_o}{\sin\vartheta}} \sum_\nu F_\nu^{e,m} e^{i\phi_o} \cdot$$

$$\cdot\Big(\sum_k e^{in_\nu(2\pi+\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k\cdot\frac{1}{4})\pi} + \sum_k e^{in_\nu(2\pi-\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k+\frac{1}{4})\pi}\Big) \qquad (11.38)$$

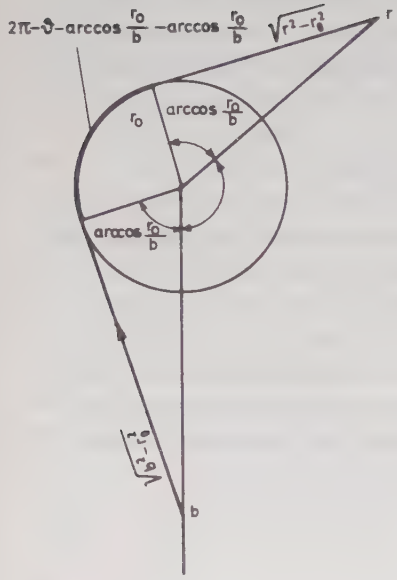


Abb. 2o

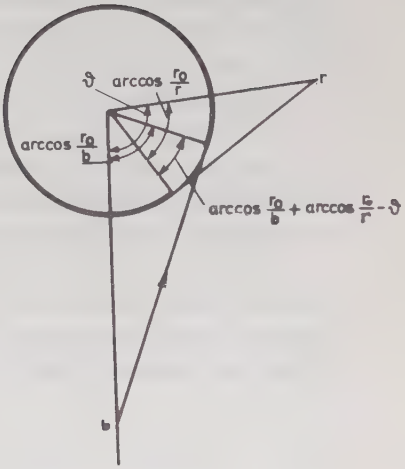


Abb. 21

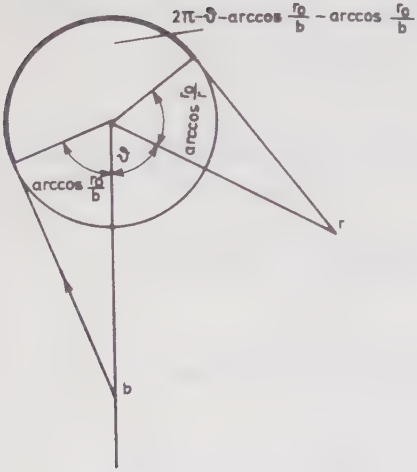


Abb. 22

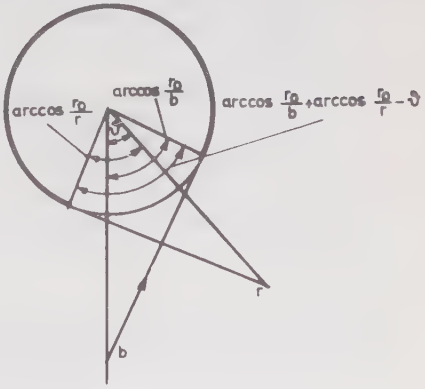


Abb. 23

Abb. 2o-23 Verschiedene Laufwege der Kriechwellen

Wir können (11.38) ebenso deuten wie die entsprechende Gleichung im Schattengebiet. Die Exponenten der Exponentialfunktionen in der Klammer stellen für $k = o$ die Phasenänderungen zweier Kriechwellen dar, die erst über die dem Sender abgewandte Seite der Kugel gekrochen sind, ehe sie den Empfänger erreichen (Abb. 2o-23). Ebenso können wir für $k = o$ von Kriechwellen sprechen, die erst nach k-maligem Umlaufen der Kugel den Empfänger erreichen.

Da die Kriechwellen im Lichtgebiet eine größere Kriechstrecke zurückzulegen haben als im Schattengebiet, ist der Anteil des gebeugten Feldes im beleuchteten Gebiet kleiner als im nicht beleuchteten.

Für $\vartheta = o$ kommt es auch hier wieder zu einem Anwachsen des gebeugten Feldes, weil sich die beiden Strahlen (Abb. 2o-23) phasengleich überlagern. Anstelle der für $\vartheta \approx o$ unbrauchbar werdenden Darstellung (11.22) für die Kugelfunktionen benutzen wir jetzt:

$$P_{n_\nu}(\cos\vartheta) \approx J_o(n_\nu \vartheta) \tag{11.39}$$

($\vartheta \approx o$, $|n_\nu| \gg 1$, $|n_\nu \vartheta|$ nicht $\gg 1$) Die weitere Durchrechnung verläuft wieder analog zur entsprechenden Rechnung im Schattengebiet. Wir erhalten also für das gebeugte Feld in Rückwärtsrichtung:

$$\left.\begin{array}{l} E_\vartheta \rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi \rightarrow Z_o H_\vartheta \rightarrow \sin\varphi \end{array}\right\} \frac{\pi k_o r_o}{r \cdot b} \sum_\nu \frac{e^{i\phi_o} e^{in_\nu(2\pi-\vartheta_{gr})}}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \left[F_\nu^e (J_o - J_2) + F_\nu^m (J_o + J_2)\right] \tag{11.4o}$$

Wählen wir wieder $k_2 \gg k_o$, d.h. $F_\nu^e = F_\nu^m = F_\nu$, so wird für $|n_\nu \sin\vartheta| \gg 1$:

$$\left.\begin{array}{l} E_\vartheta \rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi \rightarrow Z_o H_\vartheta \rightarrow \sin\varphi \end{array}\right\} \frac{1}{r \cdot b} \sqrt{\frac{2\pi k_o r_o}{\sin\vartheta}} \sum_\nu F_\nu e^{i\phi_o} \Big(\sum_k e^{in_\nu(2\pi+\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k-\frac{1}{4})\pi} + \sum_k e^{in_\nu(2\pi-\vartheta-\vartheta_{gr}+2k\pi)+i(k+\frac{1}{4})\pi} \Big) \tag{11.41}$$

und für $\vartheta \approx o$:

$$\left.\begin{array}{l} E_\vartheta \rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi \rightarrow Z_o H_\varphi \rightarrow \sin\varphi \end{array}\right\} \frac{2\pi k_o r_o}{r \cdot b} \sum_\nu \frac{F_\nu e^{i\phi_o} i(2\pi - \vartheta_{gr}) J_o(n_\nu \vartheta)}{1+e^{2i\pi n_\nu}} \tag{11.42}$$

In Rückwärtsrichtung ist ebenso wie in Vorwärtsrichtung wegen $J_o(o) = 1$ immer ein gebeugtes Feld vorhanden, das allerdings wegen der großen Kriechstrecke sehr klein ist und mit wachsendem Kugelradius rasch abnimmt. Auch im beleuchteten Gebiet ist für $k_2 >> k_o$ das Beugungsfeld überall linear polarisiert.

Für sehr große Sender- und Empfängerentfernungen (dies entspricht dem Grenzfall der ebenen Welle und des Fernfeldes der Kugel) schrumpft, wie am Anfang dieses Kapitels schon festgestellt, der Bereich des geometrischen Schattens immer mehr zusammen. In diesem Fall wird sowohl (11.24) als auch (11.38) unbrauchbar. Es interessiert in dieser Arbeit aber hauptsächlich die Rückstreuung der geschichteten Kugel. Es reicht daher aus, wenn wir uns für das Feld in Vorwärtsrichtung nur eine grobe Abschätzung verschaffen. Diese erhalten wir, wenn wir von den Reihen (1o.2o) und (1o.21) ausgehen, die für $k_2 >> k_o$ zu einer einzigen zusammenfallen:

$$S^{\infty}(\vartheta) = -\sum_{n=1}^{k_o r_o} \frac{2n+1}{n(n+1)} R_n \left(\frac{d^2}{d\vartheta^2} + \frac{1}{\sin\vartheta}\frac{d}{d\vartheta}\circ\right) P_n(\cos\vartheta) \qquad (11.43)$$

Es genügt, wie in Kapitel 9.1 nachgewiesen wurde, nur bis $n = k_o r_o$ zu summieren. Wegen des Gewichtsfaktors $2n + 1$ liefern große Werte von n den Hauptbeitrag. Deswegen können wir für die Kugelfunktionen die Darstellung (11.39) benutzen. Für den Reflexionsfaktor benutzen wir die Darstellung (1o.24), die wir für $n \approx k_o r_o$ durch $-e^{i\pi/2}$ ersetzen können. Denn es ist $\sin\tau_{oo} = \sqrt{1-(n/k_o r_o)^2} \approx o$ und damit $-2i(f_{oo} - \frac{\pi}{4}) = -2i\left[k_o r_o(\sin\tau_{oo} - \tau_{oo}\cos\tau_{oo}) - \frac{\pi}{4}\right] \approx i\frac{\pi}{2}$. Aus (11.43) wird damit:

$$S^{\infty}(\vartheta) \longrightarrow e^{i\pi/2} \sum_{n=1}^{k_o r_o} \frac{2n+1}{n(n+1)} \cdot \frac{n^2}{2} J_o(n(\pi-\vartheta))$$

$$\longrightarrow e^{i\pi/2} \sum_{n=1}^{k_o r_o} n\, J_o(n(\pi-\vartheta)) \longrightarrow e^{i\pi/2} \int_o^{k_o r_o} n\, J_o(n(\pi-\vartheta))\,dn$$

$$= k_o r_o \frac{J_1(k_o r_o(\pi-\vartheta))}{\pi-\vartheta} e^{i\pi/2} \qquad (11.44)$$

Für die Feldstärken erhalten wir schließlich:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &\longrightarrow Z_o H_\varphi \longrightarrow \cos\varphi \\ -E_\varphi &\longrightarrow Z_o H_\vartheta \longrightarrow \sin\varphi \end{aligned}\right\} \frac{e^{ik_o r}}{r} \frac{e^{ik_o b}}{b} k_o r_o \frac{J_1(k_o r_o(\pi-\vartheta))}{\pi-\vartheta} e^{i\pi/2} \qquad (11.45)$$

Unsere Vorstellung über die Kriechwellen erklärt die große Vorwärtsstreuung. Wenn Sender und Empfänger weit von der Kugel entfernt sind und der Empfänger nahe an die Achse $\vartheta = \pi$ heranrückt, legen die Kriechwellen, die am Entstehen der Vorwärtsstreuung beteiligt sind, eine sehr kurze Strecke auf der Kugeloberfläche zurück und erfahren deswegen eine geringe Dämpfung. Außerdem treffen sie für $\vartheta = \pi$ am Ort des Empfängers mit gleicher Phase zusammen. Für $\vartheta \approx \pi$ ist die Phasengleichheit fast noch gegeben, sodaß es zu einem Feldmaximum in Vorwärtsrichtung kommt.

11.2.2 Geometrisch-optisches Feld (Sattelpunktmethode)

Zur Berechnung des geometrisch-optischen Feldes haben wir in den Reihen für die Potentiale nach (11.33) die Kugelfunktionen $P_{s_\nu}(-\cos\vartheta)$ durch $-2i\sin\pi s_\nu Q^2_{s_\nu}(\vartheta)$ zu ersetzen. Da wir von vorneherein nicht wissen, ob die Vereinfachungen, die zu (11.9) bis (11.12) und damit zu (11.13) und (11.14) führen, gültig bleiben, gehen wir besser von den ursprünglichen Reihen (6.14) bis (6.17) aus.

Durch die Ersetzung $P_{s_\nu}(-\cos\vartheta) \to -2i\sin\pi s_\nu Q^2_{s_\nu}(\vartheta)$ erhalten wir Potentiale, aus denen sich die geometrisch-optische Feldverteilung herleitet. Daher werden diese Potentiale durch einen Index "geom" gekennzeichnet (U^{e}_{geom}, V^{m}_{geom} usw.). Die Residuenreihen (6.14) bis (6.17) schreiben wir als Umlaufintegral um die Polreihe des Integranden. Hierbei entsteht aus $\frac{C^{e,m}_s}{\partial/\partial s\, D^{e,m}_s}\Big|_{s_\nu}$ wieder der Reflexionsfaktor $R^{e,m}_s = R^{e,m}(s)$, für den wir nach (4. 8) $\frac{\zeta^2_s(k_o r_o)}{\zeta^1_s(k_o r_o)}\, r^{e,m}(s)$ schreiben können. Bilden wir mit Hilfe von (3.51) bis (3.54) noch die Feldstärken, so erhalten wir:

$$E^{geom}_\vartheta = \cos\varphi\left(\frac{\partial U^{e}_{geom}}{\partial\vartheta} + \frac{V^{m}_{geom}}{\sin\vartheta}\right)$$

$$\to -\frac{\cos\varphi}{2}\oint \frac{2s+1}{s(s+1)}\,\frac{\zeta^2_s(k_o r_o)}{\zeta^1_s(k_o r_o)}\Big[\frac{1}{rb}Z^1_s(k_o b)Z^1_s(k_o r)r^{e}(s)\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}Q^2_s(\vartheta) \qquad (11.46)$$

$$+ \frac{k_o^2}{\sin\vartheta}\,\zeta^1_s(k_o b)\,\zeta^1_s(k_o r)r^{m}(s)\,\frac{\partial}{\partial\vartheta}\,Q^2_s(\vartheta)\Big]\,ds$$

$$Z_o H_\varphi^{geom} = \cos\varphi \left(\frac{\partial V^e_{geom}}{\partial \vartheta} + \frac{U^m_{geom}}{\sin\vartheta}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{\cos\varphi}{2} \oint \frac{2s+1}{s(s+1)} \frac{\zeta_s^2(k_o r_o)}{\zeta_s^1(k_o r_o)} \left[\frac{k_o}{b} Z_s^1(k_o b)\zeta_s^1(k_o r) r^e(s) \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} Q_s^2(\vartheta) \right. \quad (11.47)$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{k_o}{r} \zeta_s^1(k_o b) Z_s^1(k_o r) r^m(s) \frac{\partial}{\partial\vartheta} Q_s^2(\vartheta) \right] ds$$

$$-E_\varphi^{geom} = \sin\varphi \left(\frac{\partial V^m_{geom}}{\partial \vartheta} + \frac{U^e_{geom}}{\sin\vartheta}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{\sin\varphi}{2} \oint \frac{2s+1}{s(s+1)} \frac{\zeta_s^2(k_o r_o)}{\zeta_s^1(k_o r_o)} \left[k_o^2 \zeta_s^1(k_o b)\zeta_s^1(k_o r) r^m(s) \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} Q_s^2(\vartheta) \right. \quad (11.48)$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{1}{rb} Z_s^1(k_o b) Z_s^1(k_o r) r^e(s) \frac{\partial}{\partial\vartheta} Q_s^2(\vartheta) \right] ds$$

$$Z_o H_\vartheta^{geom} = \sin\varphi \left(\frac{\partial U^m_{geom}}{\partial \vartheta} + \frac{V^e_{geom}}{\sin\vartheta}\right)$$

$$\rightarrow -\frac{\sin\varphi}{2} \oint \frac{2s+1}{s(s+1)} \frac{\zeta_s^2(k_o r_o)}{\zeta_s^1(k_o r_o)} \left[\frac{k_o}{r} Z_s^1(k_o r)\zeta_s^1(k_o b) r^m(s) \frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2} Q_s^2(\vartheta) \right. \quad (11.49)$$

$$\left. + \frac{1}{\sin\vartheta} \frac{k_o}{b} \zeta_s^1(k_o r) Z_s^1(k_o b) r^e(s) \frac{\partial}{\partial\vartheta} Q_s^2(\vartheta) \right] ds$$

Auf Grund der Multiplikation mit $\sin\pi s$ sind die Pole auf der reellen Achse weggefallen und der Integrationsweg kann über diese Achse frei verschoben werden. Dadurch wird eine Auswertung der Integrale nach der Sattelpunktmethode möglich. Die Polstellen der Integranden liegen in der Nähe der Nullstellenkurve der Hankelfunktionen erster Art. Wegen des Verhaltens der Hankelfunktionen für große $|s|$ verschwinden die Integranden im Unendlichen der s-Ebene beiderseits dieser Polstellen. In der negativen Halbebene werden die Integranden unendlich groß mit Ausnahme der Nullstellen von $\zeta_s^2(k_o r_o)$. Zwischen den Tälern beiderseits der Nullstellenkurve und der ersten Nullstelle von $\zeta_s^2(k_o r_o)$ gibt es je einen Paß, über dessen Sattelpunkte der Integrationsweg zu führen ist.

Zur Ermittlung der Sattelpunkte setzen wir in (11.46) bis (11.49) für die Hankelfunktionen ihre Debeyeschen Näherungen ein, wobei

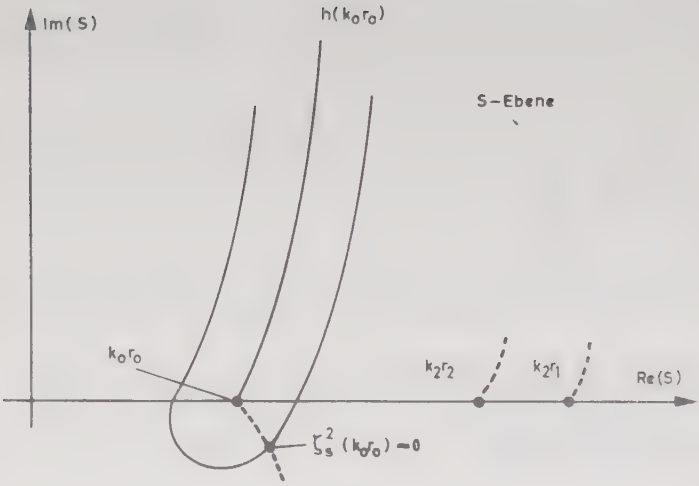


Abb. 24 **Integrationsweg zur Darstellung des geometrisch-optischen Feldes**

wir links und rechts von der Nullstellenkurve verschiedene Näherungen zu benutzen haben, nämlich (7.4) und (7.5) links und (7.7) und (7.8) rechts von der Nullstellenkurve. Für die Kugelfunktionen zweiter Art benutzen wir folgende, für $|s \cdot \sin\vartheta| \gg 1$ geltende asymptotische Darstellung:

$$Q_s^2(\vartheta) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi s \cdot \sin\vartheta}} \, e^{i(s+1/2)\vartheta - i\,\pi/4} \tag{11.50}$$

und daraus durch Differentiation nach dem schnell veränderlichen Phasenteil:

$$\frac{d}{d\vartheta} Q_s^2(\vartheta) \rightarrow \frac{i\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi \sin\vartheta}} \, e^{i(s+1/2)\vartheta - i\,\pi/4} \tag{11.51}$$

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2} Q_s^2(\vartheta) \rightarrow \frac{-s\sqrt{s}}{\sqrt{2\pi \sin\vartheta}} \, e^{i(s+1/2)\vartheta - i\,\pi/4} \tag{11.52}$$

Setzen wir zunächst in (11.46) diese asymptotischen Darstellungen ein, so erhalten wir:

$$E_\vartheta^{geom} \longrightarrow \frac{\cos\varphi}{2rb}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{2\pi\sin\vartheta}\Big[\oint \frac{2s+1}{s(s+1)}\,s\sqrt{s}\,e^{if_1(s)}\Big[\sin\tau_r\cdot\sin\tau_b\,r^e(s) - \frac{i}{s\cdot\sin\vartheta}\,\frac{r^m(s)}{\sin\tau_r\sin\tau_b}\Big]\,ds - \oint \frac{2s+1}{s(s+1)}\,s\sqrt{s}\,e^{if_2(s)}\Big[\sin\tau_r\cdot\sin\tau_b\,r^e(s) - \frac{i}{s\cdot\sin\vartheta}\,\frac{r^m(s)}{\sin\tau_r\sin\tau_b}\Big]\,ds\Big]$$

Für $|s\cdot\sin\vartheta| \gg 1$ können wir den zweiten Term in der eckigen Klammer gegen den ersten Term vernachlässigen. Für große $|s|$ können wir näherungsweise setzen:

$$\frac{2s+1}{s(s+1)}\cdot s\sqrt{s} \longrightarrow 2\sqrt{s}$$

Dann erhalten wir:

$$E_\vartheta^{geom} \longrightarrow \frac{\cos\varphi}{rb}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{2\pi\sin\vartheta}\Big[\oint\sqrt{s}\,\sin\tau_r\sin\tau_b\,r^e(s)\,e^{if_1(s)}\,ds - \oint\sqrt{s}\,\sin\tau_r\sin\tau_b\,r^e(s)\,e^{if_2(s)}\,ds\Big] \tag{11.53}$$

mit

$$f_1(s) = -2\sqrt{(k_o r_o)^2 - s^2} + 2\cdot s\cdot\arccos\frac{s}{k_o r_o} + \sqrt{(k_o r)^2 - s^2} - s\cdot\arccos\frac{s}{k_o r} + \sqrt{(k_o b)^2 - s^2} - s\cdot\arccos\frac{s}{k_o b} \tag{11.54}$$

$$f_2(s) = \sqrt{(k_o r)^2 - s^2} - s\cdot\arccos\frac{s}{k_o r} + \sqrt{(k_o b)^2 - s^2} - s\cdot\arccos\frac{s}{k_o b} \tag{11.55}$$

und

$$\sin\tau_r = \sqrt{1-\left(\frac{s}{k_o r}\right)^2}\,, \qquad \sin\tau_b = \sqrt{1-\left(\frac{s}{k_o b}\right)^2} \tag{11.56}$$

Durch die Schreibweise $\oint$ und $\oint$ soll angedeutet werden, daß das Integral einmal links und einmal rechts von den Polstellen zu bilden ist.

Wir wollen zunächst das Integral links von den Polstellen nach der Sattelpunktmethode auswerten. Sattelpunkte liegen dort, wo die Ableitung des Exponenten verschwindet.

$$\frac{df_1(s)}{ds} = 0 \rightarrow \vartheta + 2 \arccos \frac{s}{k_o r_o} - \arccos \frac{s}{k_o r} - \arccos \frac{s}{k_o b} = 0 \quad (11.57)$$

Bezeichnen wir den Sattelpunkt mit $\hat{s} = k_o p$, so ergibt sich für p die Bedingung:

$$\vartheta + 2 \arccos \frac{p}{r_o} = \arccos \frac{p}{r} + \arccos \frac{p}{b} \quad (11.58)$$

Aus Abb. 25 läßt sich p leicht graphisch bestimmen. Es ist

$$p = r_o \cdot \sin\gamma \quad (11.59)$$

der Abstand eines auf die Kugel auftreffenden Strahles vom Kugelmittelpunkt, wenn γ der Einfalls- und Reflexionswinkel ist.

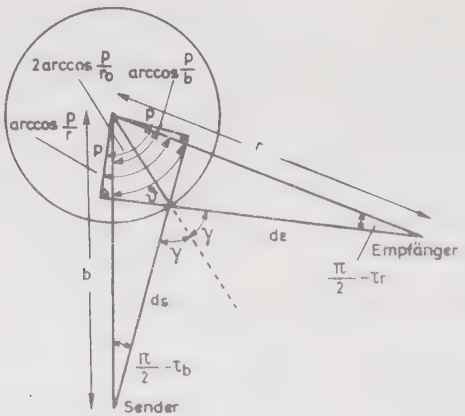


Abb. 25. Geometrisch-optische Reflexion an der Kugel

Zur Auswertung entwickeln wir den Exponenten im Integranden im Sattelpunkt bis zum zweiten Glied. Es entstehen folgende Ausdrücke:

$$f_1(\hat{s}) = -2k_o\sqrt{r_o^2-p^2} + 2k_o p \arccos\frac{p}{r_o} + k_o\sqrt{r^2-p^2} - k_o p \arccos\frac{p}{r}$$

$$+ k_o\sqrt{b^2-p^2} - k_o p \arccos\frac{p}{b} + k_o p\vartheta \qquad (11.60)$$

$$= k_o(d_S + d_E)$$

$$f_1''(\hat{s}) = -\frac{2}{k_o\sqrt{r_o^2-p^2}} + \frac{1}{k_o\sqrt{r^2-p^2}} + \frac{1}{k_o\sqrt{b^2-p^2}}$$

$$= -\frac{1}{k_o}\,\frac{2d_S d_E + r_o\cos\gamma(d_S+d_E)}{\sqrt{(r_o^2-p^2)(r^2-p^2)(b^2-p^2)}} \qquad (11.61)$$

wobei d_S bzw. d_E der Abstand des Senders bzw. Empfängers vom Reflexionspunktes auf der Kugel ist.

Da $p \ll r_o$ ist, können wir im Sattelpunkt für $r, b \gg r_o$ vereinfachen:

$$\sin\tau_r = \sqrt{1-(\frac{p}{r})^2} \approx 1, \quad \sin\tau_b = \sqrt{1-(\frac{p}{b})^2} \approx 1 \qquad (11.62)$$

Die Auswertung des Integrals führt im wesentlichen auf ein Laplace - sches Integral der Gestalt:

$$J = \int e^{i\frac{s-\hat{s}}{2}f''(\hat{s})}ds = \sqrt{\frac{2\pi}{-f''(\hat{s})}}\, e^{if(\hat{s})}\, e^{-i\pi/4} \qquad (11.63)$$

Damit erhalten wir für das Integral links von den Polstellen:

$$E_\vartheta^{geom} \rightarrow \frac{\cos\varphi}{rb}\,\frac{e^{-i\pi/4}}{2\pi\sin\vartheta}\,\sqrt{2\pi k_o}\,\sqrt{k_o p}\cdot\sin\tau_b\sin\tau_r\cdot r^e$$

$$\cdot\frac{\sqrt[4]{(r_o^2-p^2)(r^2-p^2)(b^2-p^2)}}{\sqrt{2d_S d_E + r_o\cos\gamma(d_S+d_E)}}\, e^{ik_o(d_S+d_E)}\, e^{-i\pi/4} + \ldots\ldots \qquad (11.64)$$

Mit dem Divergenzfaktor

$$\alpha = \frac{r_o(d_S+d_E)\sqrt{\sin\gamma\cos\gamma}}{\sqrt{r\cdot b\cdot\sin\vartheta(2d_S d_E + r_o\cos\gamma(d_S+d_E))}} \qquad (11.65)$$

sowie (11.61) erhalten wir schließlich:

$$E_{\vartheta}^{geom} \rightarrow \cos\varphi \cdot k_o \cdot a \cdot r^e \cdot \frac{e^{ik_o(d_S+d_E-\pi/2)}}{d_S + d_E} + \text{Anteil rechts von den Polstellen} \qquad (11.66)$$

Zur Auswertung des Integrales rechts von den Polstellen gehen wir entsprechend vor. Wir bestimmen zunächst den Sattelpunkt:

$$\frac{df_2(s)}{ds} = o \rightarrow \vartheta - \arccos\frac{s}{k_o r} - \arccos\frac{s}{k_o b} = o \qquad (11.67)$$

Bezeichnen wir diesen Sattelpunkt mit $\check{s} = k_o q$, so erhalten wir für q folgende Bedingung:

$$\vartheta = \arccos\frac{q}{r} + \arccos\frac{q}{b} \qquad (11.68)$$

An Hand von Abb. 26 erkennen wir, daß q der Abstand eines Strahles vom Kugelmittelpunkt ist, der vom Sender direkt zum Empfänger läuft.

Wir entwickeln wieder den Exponenten im Sattelpunkt (Abb. 26):

$$f_2(\check{s}) = k_o\sqrt{r^2-q^2} - k_o q \arccos\frac{q}{r} + k_o\sqrt{b^2-q^2} - k_o q \arccos\frac{q}{b} + k_o q\vartheta = k_o \cdot d \qquad (11.69)$$

$$f_2''(\check{s}) = \frac{1}{k_o\sqrt{r^2-q^2}} - \frac{1}{k_o\sqrt{b^2-q^2}} = \frac{d}{k_o\sqrt{(r^2-q^2)(b^2-q^2)}} \qquad (11.70)$$

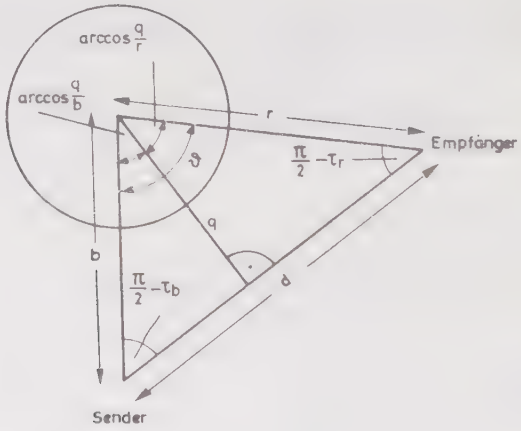


Abb. 26 Direkt einfallender Strahl

Damit erhalten wir für das Integral rechts von den Polstellen:

$$E_\vartheta^{geom} \longrightarrow - \frac{\cos\varphi}{rb} \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{2\pi\sin\vartheta}} \sqrt{2\pi k_o} \sqrt{k_o q} \frac{\sqrt[4]{(r^2-q^2)(b^2-q^2)}}{\sqrt{d}} \cdot \sin\tau_r \sin\tau_b \cdot e^{ik_o d - i\pi/4} \tag{11.71}$$

Mit

$$d \circ q = r \circ b \circ \sin\vartheta \tag{11.72}$$

und

$$\left.\begin{aligned} \sqrt[4]{r^2-q^2} &= \sqrt{r \circ \sin\tau_r} \\ \sqrt[4]{b^2-q^2} &= \sqrt{b \circ \sin\tau_b} \end{aligned}\right\} \tag{11.73}$$

ergibt sich schließlich:

$$E_\vartheta^{geom} \longrightarrow - \cos\varphi \circ k_o \circ \sin\tau_r \cdot \sin\tau_b \frac{e^{ik_o d}}{d} e^{-i\pi/2} + \text{Anteil links} \tag{11.74}$$

Wir sehen also, daß das Integral rechts von den Polstellen das Primärfeld liefert.

Bei der Wellenausbreitung um kugelförmige Erde ist das Primarfeld stets von Interesse, weil es ja erwünscht ist, daß möglichst viel Sendeenergie in den Empfänger gelangt. Bei unserer, an der Radartechnik orientierten Aufgabenstellung sind wir jedoch nur an der Rückstrahlung der Kugel ohne das Primärfeld interessiert. Denn man versucht in der Praxis, Sende- und Empfangseinrichtungen weitgehend zu entkoppeln, damit keine Störenergie vom Sender in den Empfänger gelangt.

Es reicht also aus, wenn wir nur die Integrale links von den Polstellen auswerten. Wir erhalten also schließlich:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta^{geom} &\longrightarrow Z_o H_\varphi^{geom} \longrightarrow \cos\varphi \\ - E_\varphi^{geom} &\longrightarrow Z_o H_\vartheta^{geom} \longrightarrow \sin\varphi \end{aligned}\right\} k_o \alpha r^{e,m} \frac{e^{ik_o(d_S+d_E-\pi/2)}}{d_S + d_E} \tag{11.75}$$

wobei r^e bei E_ϑ^{geom} und H_φ^{geom} gilt, während für E_φ^{geom} und H_ϑ^{geom} r^m zu nehmen ist.

Diese Formeln entsprechen genau unseren Vorstellungen von der geometrischen Optik: eine Wellenfront läuft vom Sender zur Kugel (Phasenweg d_S), wird dort reflektiert ($r^{e,m}$) und läuft zum Empfänger weiter (Phasenweg d_E). Der Divergenzfaktor α trägt der Tatsache Rechnung, daß die Wellenfront nicht an einer Ebene reflektiert wird, sondern an einer Kugelfläche. Dadurch verlaufen die Wellennormalen, die vor der Reflexion parallel waren, wenn der Sender weit genug weg ist, unter einem bestimmten Winkel zueinander, sie divergieren.

Für große Sender- und Empfängerentfernungen können wir (11.74) und (11.75) noch vereinfachen. Für $r, b \to \infty$ folgt aus (11.75):

$$\gamma \to \frac{\vartheta}{2} \tag{11.76}$$

(Siehe auch 13.2). Im Amplitudenteil dürfen wir $d_S \approx b$ und $d_E \approx r$ setzen. Dann ist:

$$\alpha \to \frac{r_o}{2} \frac{r + b}{r \cdot b} \tag{11.77}$$

Im Phasenteil ist:

$$\begin{aligned} d_S + d_E &= -2r_o\cos\gamma + b\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{b}\right)^2} + r\sqrt{1-\left(\frac{\rho}{r}\right)^2} \\ &\to -2r_o\cos\frac{\vartheta}{2} + b + r \end{aligned} \tag{11.79}$$

Ist auch noch $k_2 \gg k_o$, so wird nach (1o.24):

$$r^e = r^m = \frac{\cos\vartheta/2-1}{\cos\vartheta/2+1} = r\left(\frac{\vartheta}{2}\right) \tag{11.8o}$$

Wir erhalten somit:

$$\left.\begin{aligned} E_\vartheta &\to Z_o H_\varphi \to \cos\varphi \\ -E_\varphi &\to Z_o H_\vartheta \to \sin\varphi \end{aligned}\right\} \frac{k_o r_o}{2}\, r\left(\frac{\vartheta}{2}\right) e^{-i\left(2k_o r_o \cos\frac{\vartheta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)} \cdot \frac{e^{ik_o r}}{r} \cdot \frac{e^{ik_o b}}{b} \tag{11.81}$$

Dieser Ausdruck stimmt mit dem entsprechenden Ausdruck bei der ideal leitenden Kugel überein mit dem Unterschied, daß dort $r\left(\frac{\vartheta}{2}\right) = 1$ ist.

12. Abschließende Bemerkung

Vergleichen wir die in dieser Arbeit entwickelten Ergebnisse mit denen der ideal leitenden Kugel, so finden wir weitgehende Analogien, an einigen Stellen nur geringfügige Abweichungen. Die mathematische Formulierung des von der Kugel gestörten Dipolfeldes ist in beiden Fällen die gleiche. Der erste Unterschied ergibt sich bei der Erfüllung der Randbedingungen. Jedoch herrscht auch hier wieder Analogie. Denn die Erfüllung der Randbedingungen führt bei der ideal leitenden Kugel auf die einfachen Reflexionsfaktoren:

$$R_n^e = \frac{[k_o r_o \zeta_n^2(k_o r_o)]'}{[k_o r_o \zeta_n^1(k_o r_o)]'} \quad \text{und} \quad R_n^m = \frac{\zeta_n^2(k_o r_o)}{\zeta_n^1(k_o r_o)} \tag{12.1}$$

Bei der ummantelten Kugel erhalten wir zwei unübersichtliche Gleichungssysteme (3.60) und (3.61), deren Lösungen die Reflexionsfaktoren liefern, die sich auf folgende übersichtliche Form bringen lassen:

$$R_n^{e,m} = \frac{\zeta_n^2(k_o r_o)}{\zeta_n^1(k_o r_o)} \frac{r_{o1}^{e,m} + \frac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^2(k_1 r_o)} \frac{\zeta_n^2(k_1 r_1)}{\zeta_n^1(k_1 r_1)} r_{13}^{e,m}(1 + r_{o1}^{e,m} + r_{1o}^{e,m})}{1 - \frac{\zeta_n^1(k_1 r_o)}{\zeta_n^2(k_1 r_o)} \frac{\zeta_n^2(k_1 r_1)}{\zeta_n^1(k_1 r_1)} r_{1o}^{e,m} r_{13}^{e,m}} \tag{12.2}$$

In dieser Formel sind r_o, r_1, r_2, k_1 und k_2 durch die Bedingung der Reflexionsfreiheit miteinander verknüpft. Es werden also lediglich anstelle der Reflexionsfaktoren (12.1) der ideal leitenden Kugel die neuen Reflexionsfaktoren (12.2) der ummantelten Kugel eingeführt.

Die formale Durchrechnung der Watson-Transformation verläuft bei der ummantelten Kugel wieder analog zur Durchrechnung bei der ideal leitenden Kugel. Wir erhalten in beiden Fällen dieselben Gleichungen im Licht- und im Schattengebiet. Der Unterschied macht sich erst bei numerischen Rechnungen bemerkbar. Während bei der ideal leitenden Kugel die Polstellen von (12.1) zu suchen sind, also im wesentlichen die Nullstellen der Hankelfunktion erster Art, sind bei der geschichteten Kugel die Nullstellen des sehr komplizierten Nenners von

(12.2) zu suchen. Will man für beliebiges k_2 z.B. diese Gleichung lösen, so dürfte dies nur noch durch den Einsatz von elektronischen Rechenanlagen möglich sein. Für $k_2 \gg k_o$ ist jedoch eine Vereinfachung möglich, mit deren Hilfe wir die Pole des Reflexionsfaktors geschlossen angeben können:

$$n_\nu = s_\nu + \frac{1}{2} = k_o r_o + \frac{(k_o r_o)^{1/3}}{2} \left(\frac{3\pi}{4}\right)^{2/3} (4\nu-1)^{2/3} e^{i\pi/3}(1+f_\nu) \qquad (12.3)$$

mit $|f_\nu| \ll 1$. Für kleine $k_o r_o$ läßt diese Gleichung qualitative Aussagen über die Lage der Pole zu, für große $k_o r_o$ gilt sie sogar quantitativ. Bei der ideal leitenden Kugel ist $f_\nu = o$. Da bei der ummantelten Kugel $|f_\nu| \ll 1$ ist, liegen unsere gesuchten Pole in der Nähe der entsprechenden Pole für die ideal leitende Kugel. Da sich die Pole in beiden Fällen nur sehr wenig voneinander unterscheiden, haben auch die Beugungsdiagramme (ohne das geometrisch-optische Feld) etwa gleiches Aussehen.

Die Behandlung des geometrisch-optischen Feldes erfolgt bei der ummantelten Kugel nach demselben Rechengang wie bei der ideal leitenden Kugel. Die Endresultate haben gleiches Aussehen, wenn man den Reflexionsfaktor $r(\frac{\vartheta}{2})$ der geschichteten Kugel durch den (geometrisch-optischen) Reflexionsfaktor $r = -1$ der ideal leitenden Kugel ersetzt. Das Gesamtfeld als Überlagerung des geometrisch-optischen und des Beugungsfeldes pendelt also bei der ideal leitenden Kugel um einen konstanten geometrisch-optischen Wert, während es bei der ummantelten Kugel um einen Wert pendelt, der durch den Reflexionsfaktor $r(\frac{\vartheta}{2})$ gegeben ist.

Der Einsatz moderner Großrechenanlagen mit ihren hohen Rechengeschwindigkeiten ermöglicht es, die ursprünglichen Reihen (Mieschen Reihen (3.47) bis (3.5o)) mit nicht allzu großem Zeitaufwand numerisch zu behandeln. Da wir annehmen können, daß die Rechengeschwindigkeit in Zukunft noch gesteigert werden wird, wird auch die Behandlung dieser Reihen selbst für sehr große $k_o r_o$ mit wirtschaftlichen Rechenzeiten möglich sein. Es erhebt sich dann die Frage, ob die Durchführung der Watson-Transformation überhaupt noch sinnvoll bleibt.

Zunächst wandelt die Watson-Transformation eine langsam konvergierende Reihe in eine sehr schnell konvergierende um. Während zur hinreichend genauen Berechnung der ursprünglichen Reihen etwa so viele Glieder berücksichtigt werden müssen wie $k_o r_o$ groß ist, reicht unter gewissen Bedingungen bei den transformierten Reihen schon ein Glied aus. Den eigentlichen Vorteil erkennen wir aber bei der Diskussion der Residuenreihen. Während die ursprünglichen Reihen kaum oder wenigstens nicht unmittelbar eine Aussage erlauben über das Aussehen des Beugungsdiagrammes, liefert uns die Diskussion der Residuenreihen eine einfache Vorstellung über den Beugungsmechanismus. Zwangsläufig erhalten wir eine Trennung des Schattengebietes vom Lichtgebiet mit den dort vorhandenen Feldstärken. Im Lichtgebiet ergibt sich zudem noch eine Trennung des Beugungsanteiles vom geometrisch-optisch reflektierten Feld. An Hand der Modellvorstellung über den Beugungsmechanismus können wir erklären, warum ein Feld im Kern des Schattens festzustellen ist, warum bei der geschichteten Kugel trotz Reflexionsfreiheit in Rückwärtsrichtung ein, wenn auch sehr kleines Feld zu messen ist, warum das Beugungsdiagramm oszilliert, warum es zu der großen Vorwärtsstreuung kommt. Diese ganzen Einblicke in den Beugungsmechanismus wären uns verschlossen geblieben, wenn wir den "Verlockungen" der schnellen elektronischen Rechenmaschinen gleich nachgegeben und die ursprünglichen Reihen programmiert hätten.

13. Numerische Ergebnisse

Zwei wesentliche Schwierigkeiten tauchen bei den numerischen Untersuchungen auf: 1.) die Bestimmung der Pole des Reflexionsfaktors, 2.) das Bilden der Ableitung des Nenners des Reflexionsfaktors bei der Bestimmung des Residuums. Unter der Bedingung $k_2 \gg k_o$ fallen die Reflexionsfaktoren für den TE- und TM-Fall zusammen zu einem einzigen Reflexionsfaktor. Es ist daher nur eine Eigenwertgleichung zu lösen und nur einmal der Nenner des Reflexionsfaktors zu differenzieren. Wir beschränken uns daher auf die Behandlung dieses Grenzfalles. Wir rücken bei den numerischen Betrachtungen Sender und Empfänger weit von der Kugel weg (Anlehnung an die Praxis) und haben

deswegen nur die Reihen (11.37), (11.40) und die Gleichung (11.78) zu behandeln.

13.1 Eigenwertgleichung

Wir betrachten den Reflexionsfaktor nach (10.25):

$$R_s = \frac{e^{-i(f_{oo}-\pi/4)}}{2i\sin(f_{oo}-\pi/4)} \cdot \frac{\sin\tau - 1}{i\cdot\sin\tau\cdot tg(f_{oo}+\pi/4)+1}$$

den wir nach einigen leichten Umformungen auf folgende Gestalt bringen:

$$R_s = \frac{e^{-i(f_{oo}-\pi/4)}}{2} \cdot \frac{\sin\tau - 1}{\sin\tau\cos(f_{oo}-\pi/4)+ i\sin(f_{oo}-\pi/4)} \qquad (13.1)$$

mit

$$f_{oo} = k_o r_o(\sin\tau - \tau\cos\tau) \qquad (13.2)$$

und

$$\cos\tau = \frac{s+\frac{1}{2}}{k_o r_o} \qquad (13.3)$$

Die Eigenwertgleichung (10.26) hat dann folgendes Aussehen:

$$\sin\tau\cdot\cos(f_{oo}-\frac{\pi}{4}) + i\sin(f_{oo}-\pi/4) = o \qquad (13.4)$$

Diese Gleichung wird nun in der τ-Ebene gelöst, wobei wir uns auf den Streifen

$$o \leq Re(\tau) \leq \frac{\pi}{2}$$
$$o \geq Im(\tau) \geq -\infty \qquad (13.5)$$

beschränken können. Die Lösungen in der τ-Ebene werden mittels (13.3) in die s-Ebene transformiert. Dabei wird der durch (13.5) definierte Streifen der τ-Ebene auf den 1. Quadranten der s-Ebene abgebildet, in dem die gesuchten Pole liegen müssen.
Die Eigenwertgleichung (13.4) der ummantelten Kugel ist eine Kombination der Eigenwertgleichungen der ideal leitenden Kugel

im TE- und TM-Fall. Nach (11.1) und mit den Debeyeschen asymptotischen Darstellungen der Hankelfunktionen ist:

$$\cos\left(f_{oo} - \frac{\pi}{4}\right) = o \tag{13.6}$$

die Eigenwertgleichung der ideal leitenden Kugel im TE-Fall und

$$\sin\left(f_{oo} - \frac{\pi}{4}\right) = o \tag{13.7}$$

dieselbe Gleichung im TM-Fall. In der Nähe der reellen τ-Achse ist $\sin\tau$ nicht sehr von 1 verschieden. Wir können daher annehmen, daß die ersten Lösungen der Eigenwertgleichung der ummantelten Kugel ungefähr gleich weit entfernt liegen von den entsprechenden Lösungen bei der ideal leitenden Kugel im TE- und TM-Fall. Entfernen wir uns weiter von der reellen τ-Achse, so wächst $\sin\tau$ exponentiell an, sodaß $\sin\tau \cdot \cos(f_{oo} - \frac{\pi}{4})$ der dominierende Teil der Eigenwertgleichung wird. Wir können also erwarten, daß die von der reellen Achse weiter entfernten Eigenwerte sich denen der ideal leitenden Kugel im TE-Fall immer mehr annähern. In der Tat zeigen die in Abb. 27 gezeichneten Eigenwerte dieses Verhalten.

Die Gleichungen (1o.39) und (1o.4o) lassen eine qualitative Aussage über die Abhängigkeit der Eigenwerte von ν und $k_o r_o$ zu. Nach (1o.4o) ist f_ν umgekehrt proportional zu $k_o r_o$ und $(4\nu - 1)^2$. Für die höheren Eigenwerte geht $f_\nu \to o$ (große ν). Nach (1o.39) nähern sich diese Eigenwerte daher immer mehr denen von der ideal leitenden Kugel, wie es in Abb. 27 zu sehen ist. Ebenso geht $f_\nu \to o$ für wachsende $k_o r_o$. In Abb. 28 ist zu erkennen, wie sich die Eigenwerte für $k_o r_o = 1o...2o$ immer mehr denen der ideal leitenden Kugel nähern[+]. Das heißt für die Praxis, daß sich die gebeugten Anteile des Rückstrahldiagrammes der ideal leitenden Kugel und der ummantelten Kugel für große Kugelradien nicht viel voneinander unterscheiden.

[+] Die Gleichung dieser Kurve erhalten wir aus (13.6) bzw. (13.7). Da der cos oder sin nur auf der reellen Achse Nullstellen hat, liegen diese auf der durch

$$\mathrm{Im}\left(f_{oo} - \frac{\pi}{4}\right) = \mathrm{Im}\left\{k_o r_o(\sin\tau - \tau\cos\tau)\right\} = o$$

gegebenen Kurve.

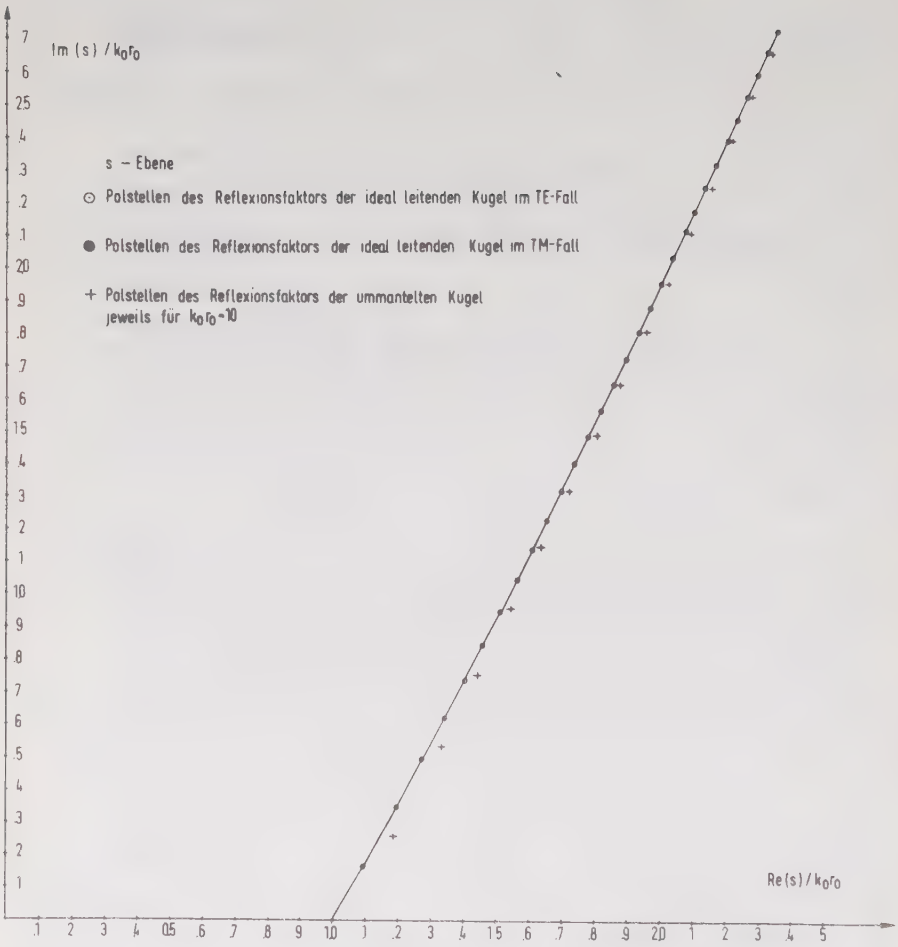


Abb. 27 Polstellen des Reflexionsfaktors der ideal leitenden Kugel und der ummantelten Kugel

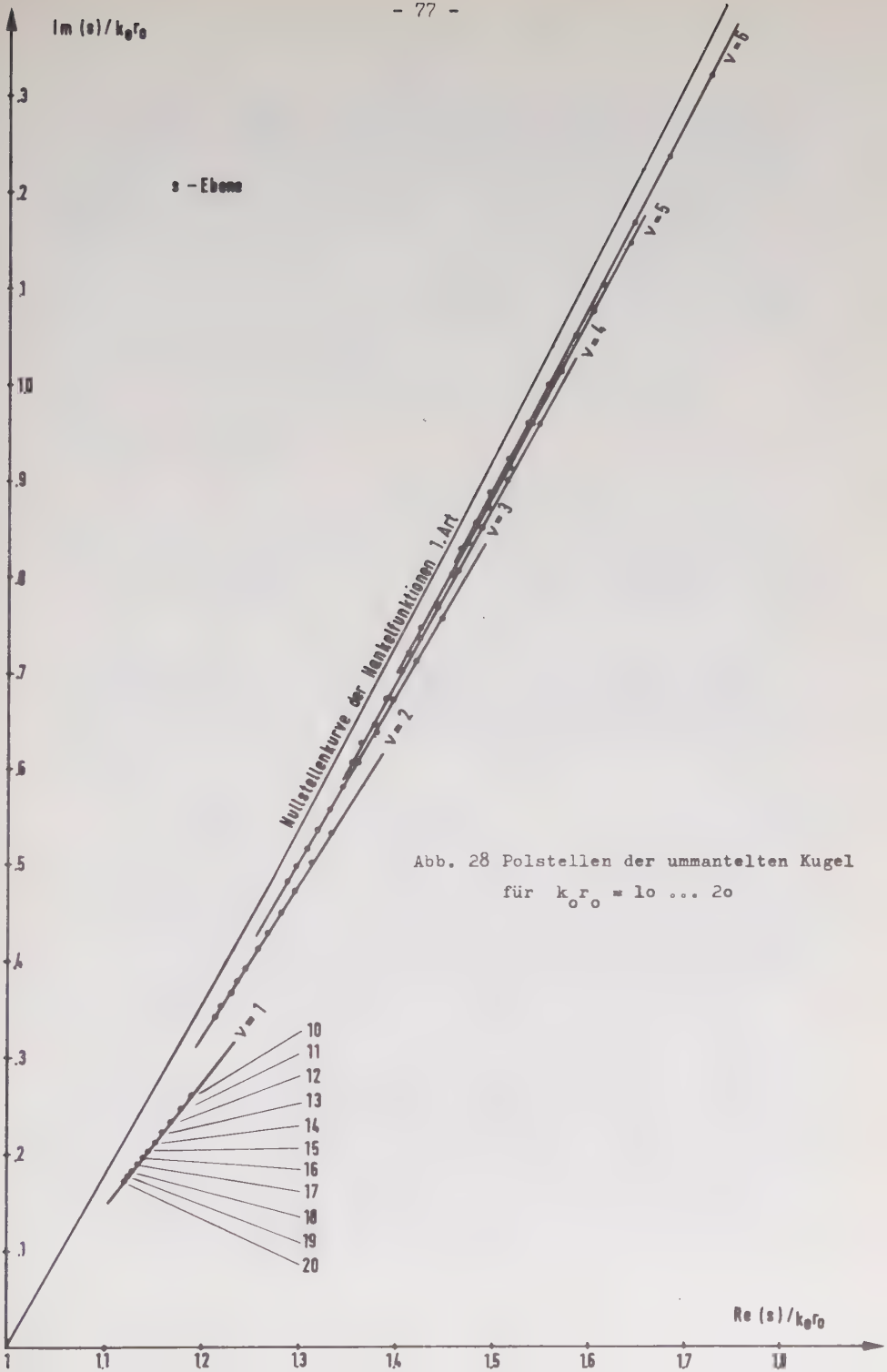


Abb. 28 Polstellen der ummantelten Kugel
für $k_o r_o = 1o \ldots 2o$

Die Eigenwertgleichung (13.4) wurde mit Hilfe des Newtonschen Iterationsverfahrens für komplexwertige Funktionen

$$\tau_{i+1} = \tau_i - \frac{f(\tau_i)}{f'(\tau_i)} \tag{13.8}$$

gelöst. Dabei ist

$$f(\tau) = \sin\tau \cos(f_{oo}-\pi/4) + i \sin(f_{oo}-\pi/4) \tag{13.9}$$

und

$$f'(\tau) = \frac{df(\tau)}{d} = k_o r_o \sin\tau(\cos(f_{oo}-\pi/4) + i\cdot\sin\tau\cdot\sin(f_{oo}-\pi/4)) - i\cdot\cos\tau\cdot\cos(f_{oo}-\pi/4)) \tag{13.10}$$

Als Näherungswerte für den Start der Newtonschen Iteration wurden die (bekannten) Eigenwerte der ideal leitenden Kugel im TE-Fall vorgegeben. Die Lösungen konnten beliebig genau (begrenzt durch die Maschinengenauigkeit) berechnet werden.

Die folgende Tabelle zeigt für $k_o r_o$ = 1o und 1ooo einen Vergleich zweier Näherungslösungen mit den Lösungen, die sich aus dem Newtonschen Iterationsverfahren ergeben:

$k_o r_o$ = 1o

ν	(1o.26)		(1o.27)		(1o.39)	
1	1.1872	o.26oo	1.1948	o.2493	1.1979	o.3343
2	1.33o1	o.5332	1.3471	o.5o77	1.3488	o.6o46
3	1.4454	o.76o5	1.47o3	o.7193	1.4716	o.8171
4	1.5467	o.9639	1.5789	o.9o66	1.58oo	1.oo47
5	1.6388	1.1518	1.6781	1.o778	1.679o	1.1762
$k_o r_o$ = 1ooo						
1	1.oo92	o.1497	1.oo92	o.1496	1.oo92	o.1595
2	1.o162	o.271o	1.o162	o.27o6	1.o162	o.28o6
3	1.o218	o.3699	1.o219	o.3693	1.o219	o.3793
4	1.o269	o.4573	1.o269	o.4564	1.o269	o.4663
5	1.o314	o.5372	1.o315	o.536o	1.o315	o.5459

Die erste Spalte enthält die Numerierung der Eigenwerte. Die beiden nächsten Spalten enthalten Real- und Imaginärteil der Lösungen nach dem Newtonschen Verfahren. Die weiteren beiden Spalten enthalten die Wurzeln des Polynoms 3. Grades (1o.27), die mit (1o.28) in den ersten Quadranten der s-Ebene zu liegen kommen. Die beiden letzten Spalten enthalten die Näherungslösungen nach Gleichung (1o.39) und (1o.4o). Alle Eigenwerte sind zur Normierung durch $k_o r_o$ dividiert. Wir erkennen, daß die Wurzeln des Polynoms bessere Lösungen liefern als die Näherungsformel (1o.39).

13.2 Rückstrahldiagramm

Beim Aufsummieren der Residuenreihe (11.39) ist zunächst der Faktor

$$F_\nu = \frac{C_\nu}{\frac{d}{ds} D_s \Big| s=s_\nu}$$

zu berechnen. Dazu führen wir die Differentiation nach s auf die Differentiation nach τ zurück. Anstelle der Eigenwerte s_ν in der s-Ebene benutzen wir dann die Lösungen τ_ν in der τ-Ebene. Aus (13.3) ergibt sich:

$$\frac{d}{ds} = \frac{d\tau}{ds}\frac{d}{d\tau} = -\frac{1}{k_o r_o \sin\tau}\frac{d}{d\tau} \qquad (13.11)$$

Somit ist:

$$F_\nu = -\frac{e^{-i(f_{oo}-\pi/4)}}{2} k_o r_o \sin\tau \; \frac{\sin\tau - 1}{\frac{d}{d\tau}(\sin\tau\cos(f_{oo}-\pi/4)+i\sin(f_{oo}-\pi/4))}\Big|_{\tau=\tau_\nu} \qquad (13.12)$$

wobei für $\frac{d}{d\tau}(\ldots)$ der Ausdruck (13.1o) zu setzen ist.

Bei der Berechnung des geometrisch-optischen Feldes haben wir aus (11.58) und (11.59) den Einfalls- und Reflexionswinkel γ an der Kugel zu berechnen. Da wir Sender- und Empfängerentfernung sehr groß wählen wollen, also r, b $\gg r_o$ ist, vereinfachen wir in (11.58) Es ist:

$$\arccos\frac{\rho}{r} = \arccos\left(\frac{r_o}{r}\sin\gamma\right) \approx \arccos(o) = \frac{\pi}{2}$$

und ebenso

$$\arccos \frac{p}{b} = \arccos\left(\frac{r_o}{b} \sin\gamma\right) \approx \arccos\,(o) = \frac{\pi}{2}$$

Damit erhalten wir aus (11.58):

$$\arccos \frac{p}{r_o} = \frac{1}{2}\,(\pi - \vartheta)$$

$$p = r_o \cdot \sin\gamma = r_o \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\vartheta}{2}\right) = r_o \sin\frac{\pi}{2}$$

$$\gamma = \frac{\vartheta}{2} \qquad (13.13)$$

Weiter führen wir sowohl im geometrisch-optischen Feld als auch im Beugungsanteil den Normierungsfaktor

$$F_{norm} = \frac{2rb}{k_o r_o} \qquad (13.14)$$

ein. Wir erreichen dadurch, daß das Rückstrahldiagramm unabhängig von Sender- und Empfängerentfernung und vom Kugelradius wird.

Das Rückstrahldiagramm ist die Summe aus geometrisch-optischem Feld und Beugungsfeld. Wir bezeichnen diese Summe mit $S(\vartheta)$ (ohne $\cos\varphi$ und $\sin\varphi$). In den Abb. 29-42 ist jeweils das Quadrat $\frac{4r^2b^2}{k_o^2 r_o^2}\, S(\vartheta)^2$ aufgetragen.

Abb. 29 und 3o zeigen das Rückstrahldiagramm der ummantelten Kugel für verschiedene $k_o r_o$, d.h. für verschiedene Kugelradien in logarithmischer Darstellung. Die glatten Kurven stellen das geometrisch-optische Feld dar, um welches das Rückstrahldiagramm auf Grund des Einflusses des Beugungsfeldes oszilliert. Für wachsende Kugelradien (wachsende $k_o r_o$) werden im mittleren Teil der Kurven die Annäherungen an das geometrisch-optische Feld immer besser; das Beugungsfeld wird immer kleiner, da die Kriechwege auf der Kugel immer größer werden. In Rückwärtsrichtung ($\vartheta \approx o$) ist ein endliches Feld vorhanden, das sich allmählich auf den geometrisch-optischen Wert einpendelt. Die Abbildungen 31-41 zeigen diese Verhalten in der Umgebung von $\vartheta = o$ etwas genauer.

Mit wachsendem ϑ werden die Oszillationen, d.h. der Einfluß des Beugungsfeldes immer größer, da jeweils ein Kriechweg auf der Kugeloberfläche immer kleiner wird (siehe dazu Abb. 2e-23) und den Hauptbeitrag zum Feld liefert, während der andere Kriechweg fast um die Kugel herumführt und wegen der großen Dämpfung nur einen geringen Beitrag liefert. Betrachten wir dazu die Exponenten der Exponentialfunktionen in (11.37). Für große Empfängerentfernungen ist $\vartheta_{gr} \approx \pi$, sodaß wir folgende Exponenten erhalten:

$$i \cdot n_\nu \, (\pi + \vartheta + 2k\pi) + i \, (k - \tfrac{1}{4})\pi$$

und

$$i \cdot n_\nu \, (\pi - \vartheta + 2k\pi) + i \, (k + \tfrac{1}{4})\pi$$

Je näher ϑ an π heranrückt, umso größer wird der erste Exponent ($k = o$). Dieser Exponent gehört zur Kriechwelle, die den größeren Weg zurücklegt. Er ergibt, mit $i \cdot n_\nu$ multipliziert, eine große Dämpfungskonstante. Umgekehrt wird der zweite Exponent immer kleiner, und er liefert auch eine kleinere Dämpfungskonstante, sodaß von ihm der Hauptbeitrag zum Feld herrührt.

Die Periode der Oszillationen wird mit wachsendem Kugelradius immer kleiner. Denn wenn wir in der Reihe (11.38) nur das erste Glied berücksichtigen ($\nu = 1$), so erhalten wir, da die Exponentialfunktion die Periode $2\pi i$ hat ($n_\nu = k_o r_o$):

$$\vartheta_1 - \vartheta_2 = \frac{2\pi}{k_o r_o} \qquad (13.15)$$

wobei ϑ_1 und ϑ_2 zwei aufeinanderfolgende Schnittpunkte des Rückstrahldiagrammes mit dem Bild des geometrisch-optischen Feldes sind.

In Abb. 42 sind Betrag und Phase des Rückstrahldiagrammes für $\vartheta = o$ aufgetragen. Wir erkennen, daß bei Verdopplung des Kugelradius das Quadrat der Feldstärken auf den hundertsten Teil zurückgeht.

Abb. 43 [14] stellt zum Vergleich einige Rückstrahldiagramme der ideal leitenden Kugel dar. Es ist angenommen, daß Sender und

Empfänger sich im Unendlichen befinden. Es sind jeweils die beiden Rückstrahldiagramme $S_\perp$ und $S_\parallel$ eingezeichnet, die bei der ummantelten Kugel auf Grund der Reflexionsfreiheit zusammenfallen ((1o.2o) und (1o.21)).

Endlich gibt Abb. 44 einen Überblick über die benötigten Summenglieder bei der Berechnung der Residuensumme. Die Summierung erfolgte mit einer relativen Genauigkeit von $1o^{-4}$ zweier aufeinanderfolgender Summanden.

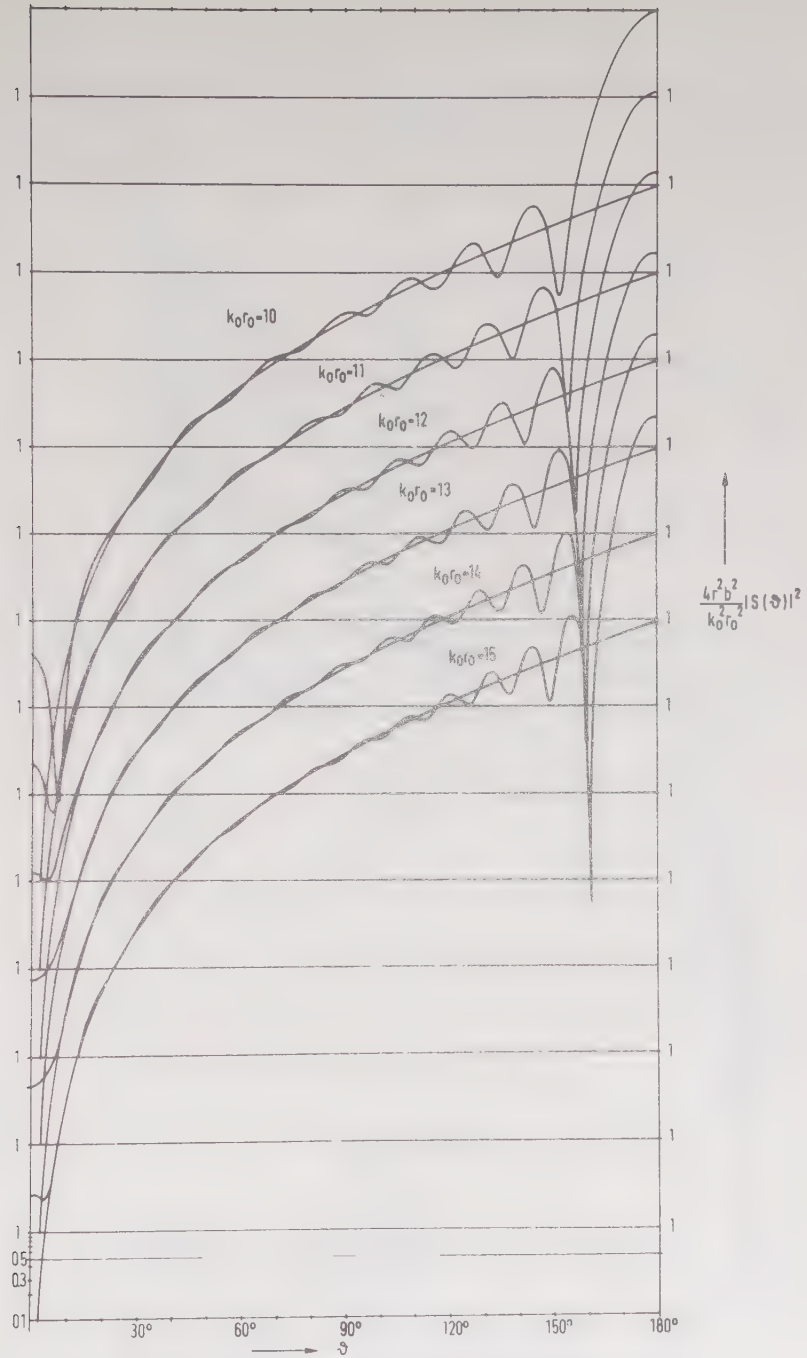


Abb. 29 Rückstrahldiagramm der ummantelten Kugel für verschiedene Kugelradien

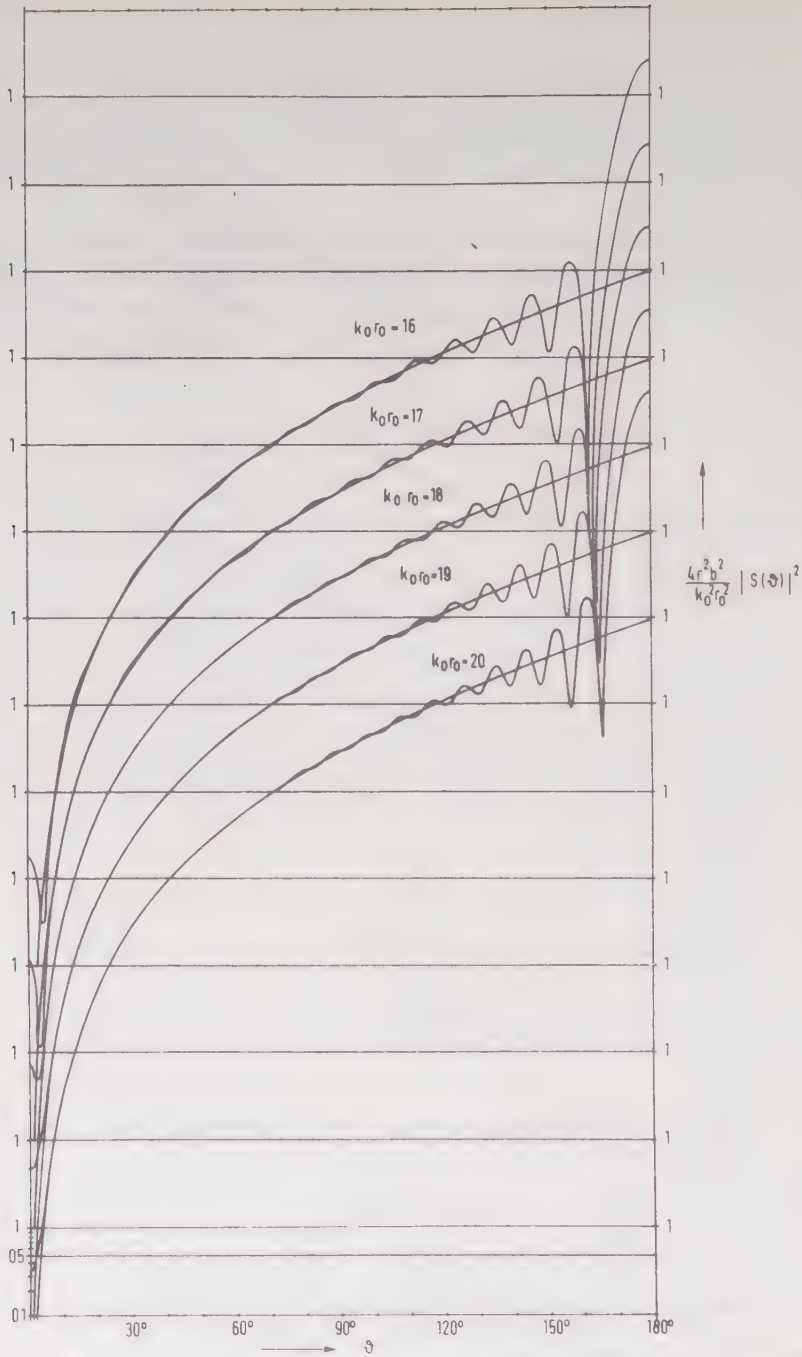
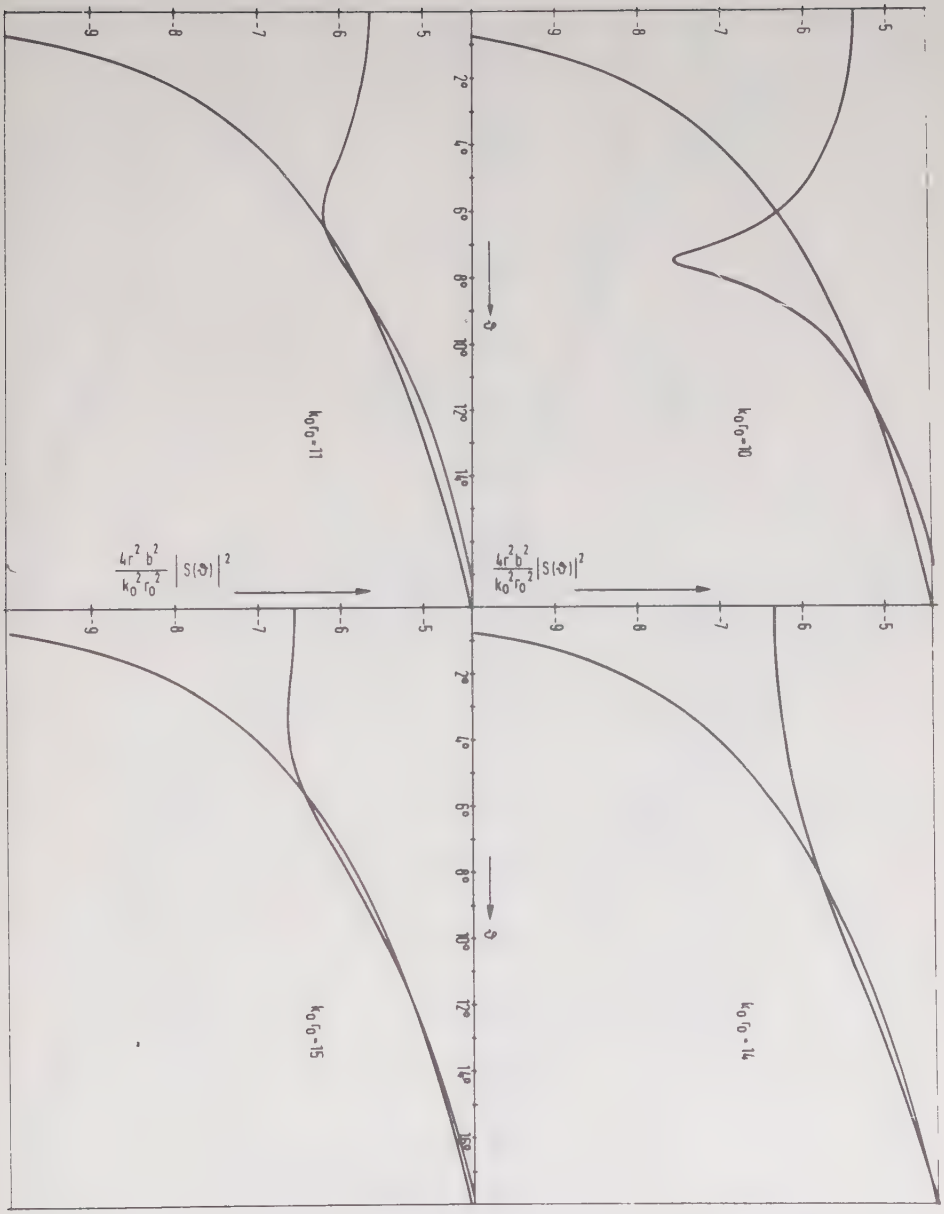
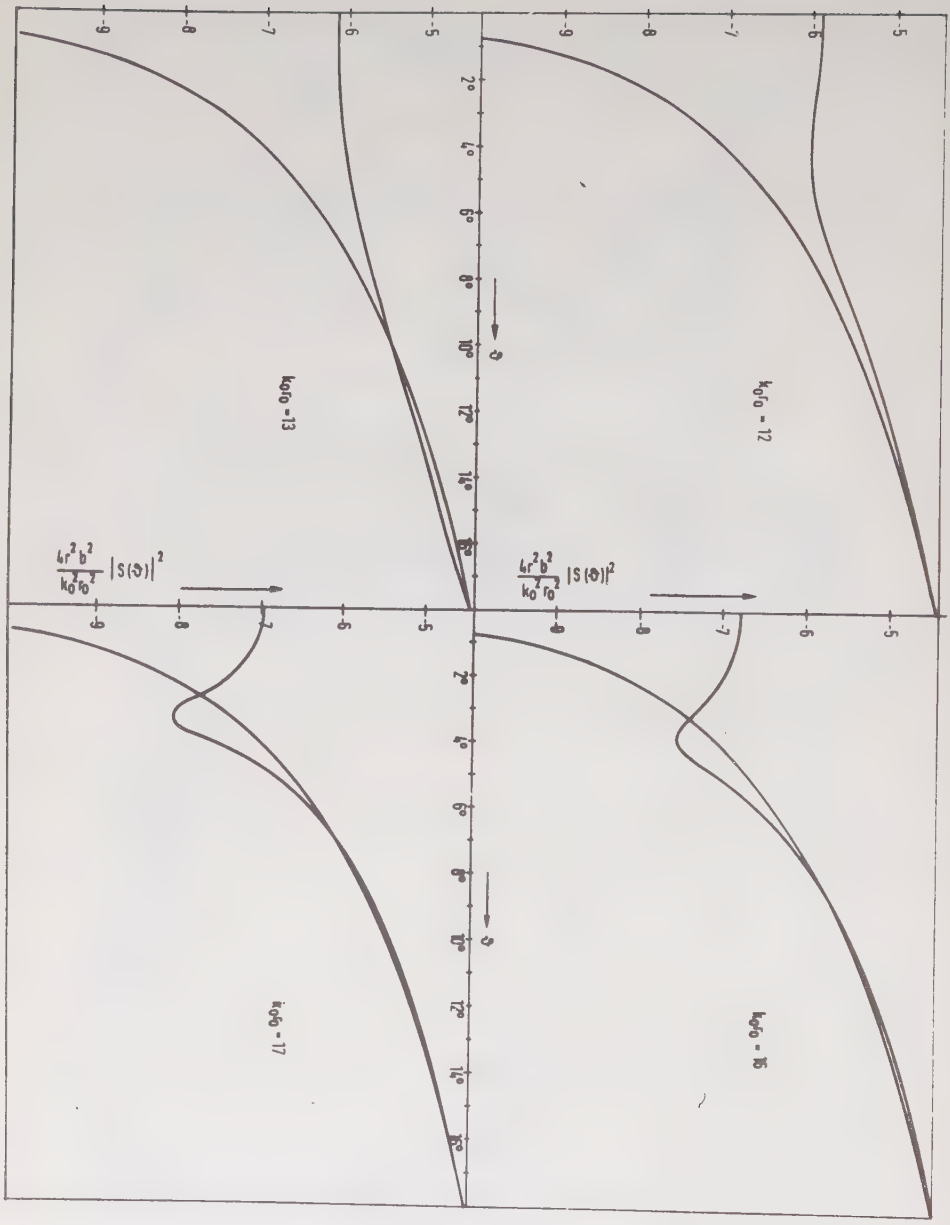


Abb. 30 Rückstrahldiagramm der ummantelten Kugel für verschiedene Kugelradien


$k_0 r_0 = 10$
$k_0 r_0 = 11$
$k_0 r_0 = 14$
$k_0 r_0 = 15$
$\frac{4r^2 b^2}{k_0^2 r_0^2} |S(\vartheta)|^2$
ϑ
2°
4°
6°
8°
10°
12°
14°
16°
-5
-6
-7
-8
-9


$k_0r_0 = 12$
$k_0r_0 = 13$
$k_0r_0 = 16$
$k_0r_0 = 17$
$\frac{4r^2b^2}{k_0^2r_0^2}|S(\Theta)|^2$
Θ
2°
4°
6°
8°
10°
12°
14°
16°
-5
-6
-7
-8
-9

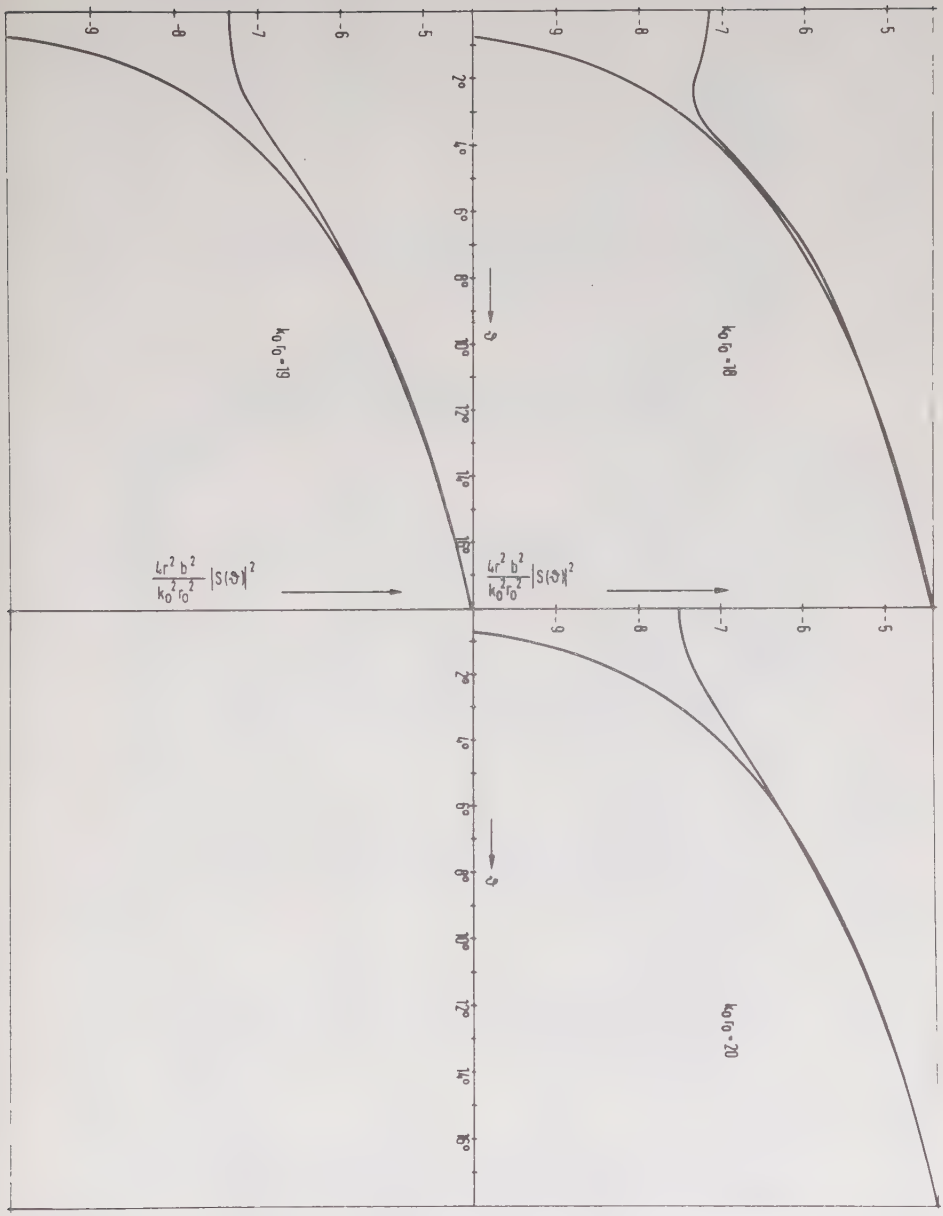


Abb. 31-41 Rückstrahldiagramm der ummantelten Kugel für verschiedene Kugelradien in der Nähe von $\vartheta = 0$

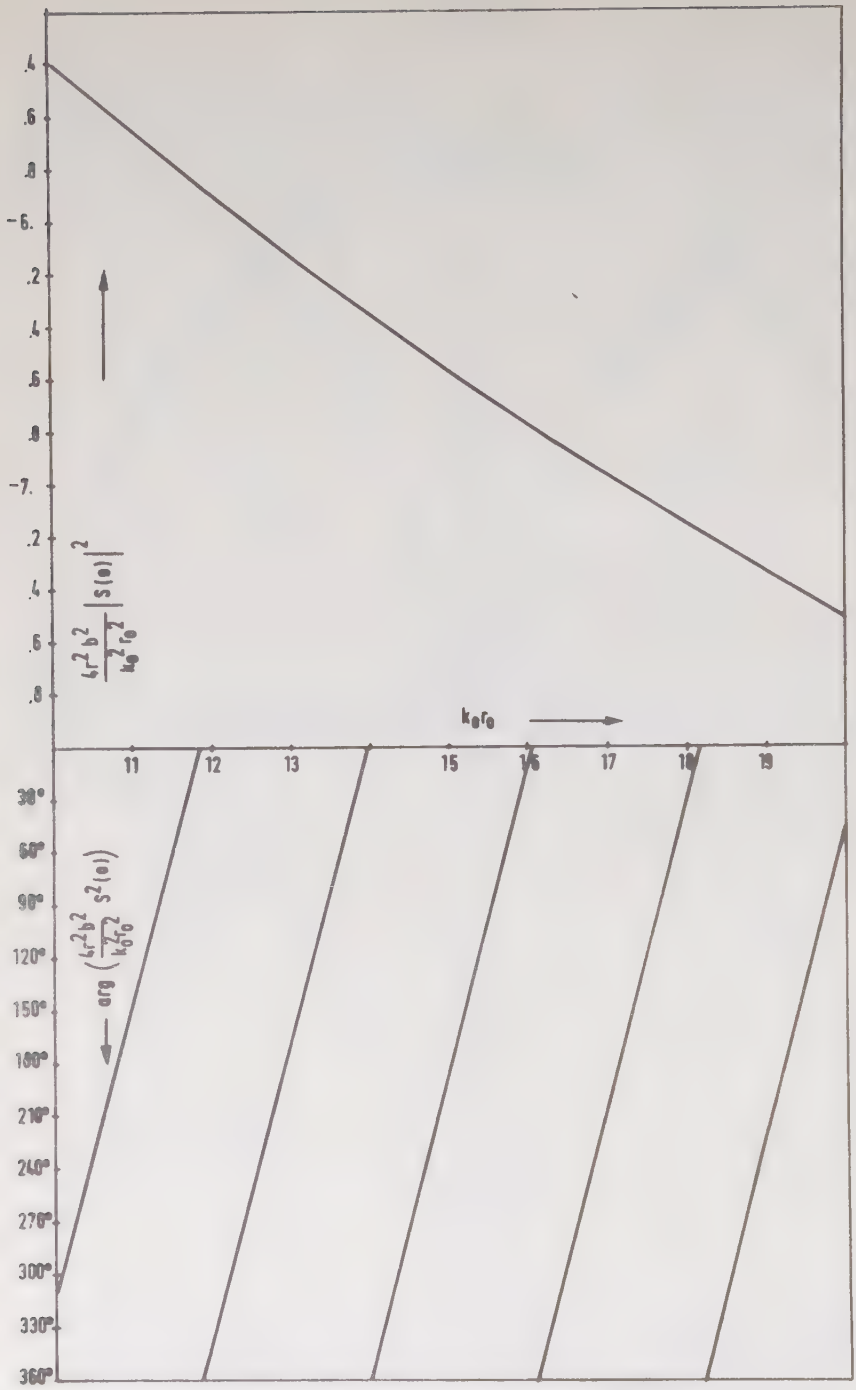


Abb. 42 Betrag und Phase des Rückstrahldiagrammes für $\vartheta = o$ in Abhängigkeit vom Kugelradius

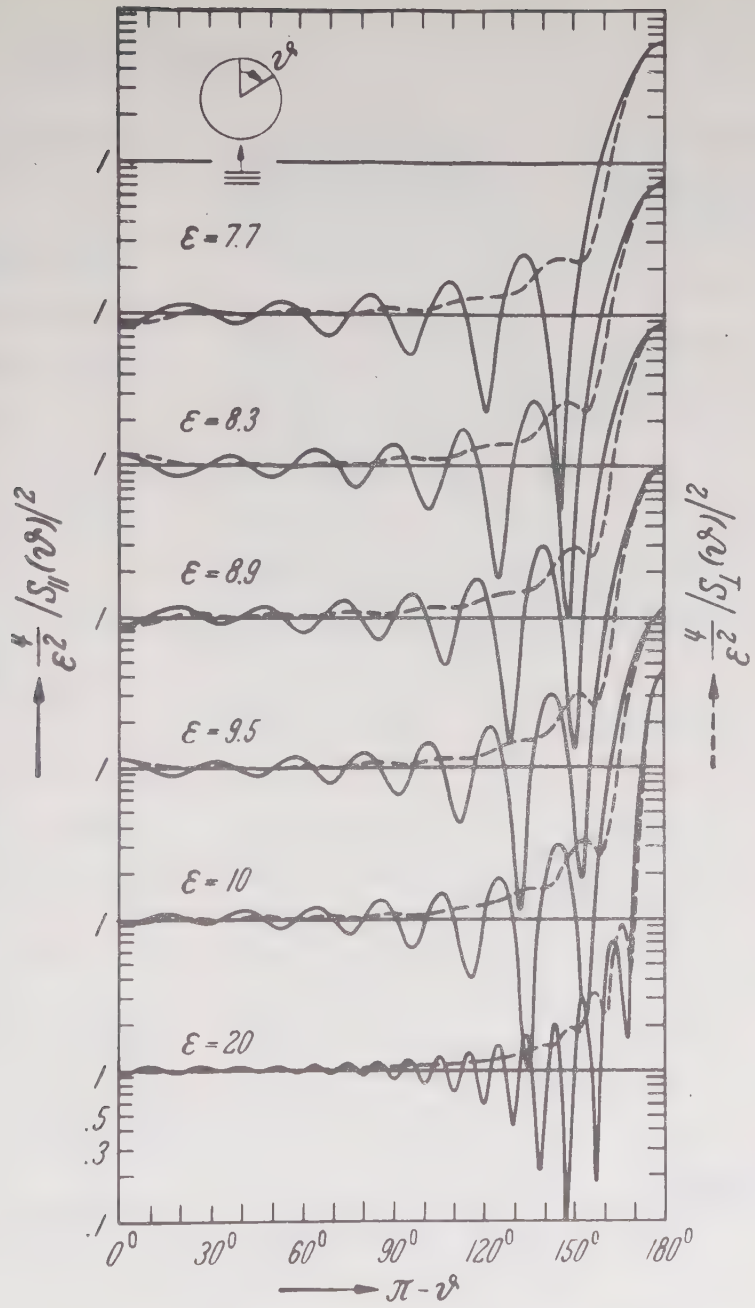


Abb. 43 Rückstrahldiagramm der ideal leitenden Kugel für verschiedene Kugelradien

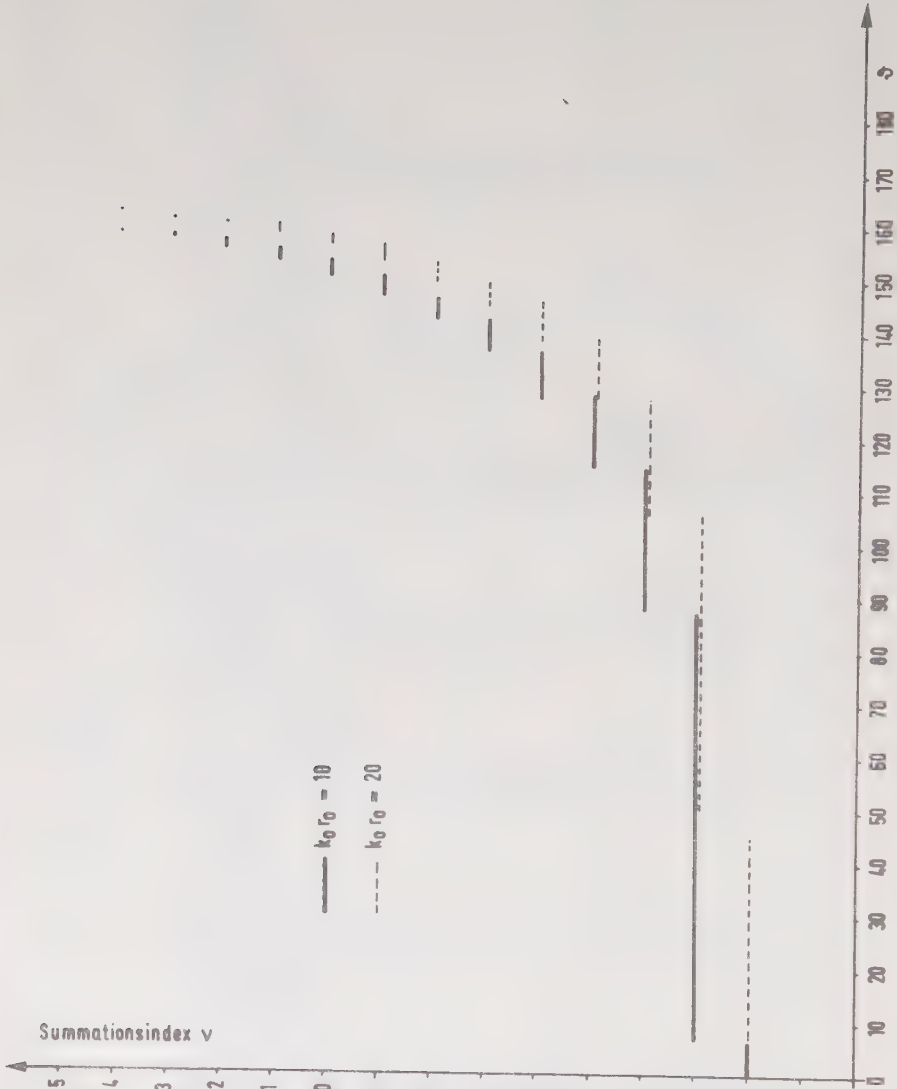


Abb. 44 Anzahl der Summationsglieder in Abhängigkeit von ϑ

14. Literaturverzeichnis

[1] K.D. Becker: Feldstärkeberechnungen für einen logarithmischen Oberflächenwellenleiter. Inaugural-Dissertation, math.naturw.Fakultät der Universität des Saarlandes, Saarbrücken 1966

[2] P. Beckman und W. Franz: Asymptotisches Verhalten der Zylinderfunktionen in Abhängigkeit vom komplexen Index. Z.angew.Math.Mech. Bd.37, Nr. 1/2, Jan./Febr. 1957

[3] H. Bremmer: Terrestrial Radio Waves. Elsevier Publishing Company, New York 1949

[4] H. Bremmer: Propagation of Electromagnetic Waves. Handbuch der Physik, Bd. XVI, Elektrische Felder und Wellen, Springer-Verlag, 1958, S. 423-639

[5] T.S. Bromwich: Electromagnetic Waves. Phil.Mag. 38, 1919, S. 143-164

[6] P. Debeye: Semikonvergente Entwicklungen für die Zylinderfunktionen. Sitzungsbericht d. math. phys. Kl. d. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, Bd. 4o, 191o, Nr.5

[7] G. Eckart: Über die Strahlung eines magnetischen Dipoles in kugelförmig geschichteter Atmosphäre. A.E.Ü. 5, 1951, S. 113-118

[8] F. Emde: Paßintegrale für Zylinderfunktionen vom komplexen Index. Z.angew.Math.Mech., Bd.19, Nr.2, April 1939

[9] A. Erdelyi: Asymptotic Expansions. Dover Publications, 1955

[1o] V.A. Fock: Electromagnetic Diffraction and Propagation Problems Pergamon Press, Oxford 1965

[11] W. Franz: Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen. Ergebnisse der Angewandten Mathematik, Springer-Verlag 1957

[12] W. Franz: Über die Greensche Funktion des Zylinders und der Kugel. Zeitschrift für Naturforschung, 9a, S. 7o5-716, 1954

[13] W. Franz und K. Depperrmann: Theorie der Beugung an der Kugel unter Berücksichtigung der Kriechwelle. Ann.d.Physik, 6. Folge, Bd. 14, 1954, S. 253-264

[14] H. Hönl, A.W.Maue und K. Westphal: Theorie der Beugung. Handbuch der Physik XXV/1, Kristalloptik und Beugung, Springer-Verlag 1961

[15] T. Kahan und G. Eckart: Exposé d'ensemble des développments asymptotiques en physique ondulatoire. La revue Scientifique, 1949, S. 3-24

[16] C. Müller: Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Springer-Verlag 1957

[17] B. van der Pol: Selected Scientific Papers, Bd. I, II, North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1960

[18] B. van der Pol und H. Bremmer: The Diffraction of Electromagnetic Waves from a Point Source Round a Finitely Conducting Sphere with Applications to Radiotelegraphy and the Theory of Rainbow.
Teil I: Phil.Mag. 24, 1937, S. 141-176,
Teil II: Phil. Mag. 24, 1937, S. 825-864

[19] A. Sommerfeld: Vorlesungen über theoretische Physik, Bd. VI, Partielle Differentialgleichungen der Physik, Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1958

[20] J.R. Wait: Electromagnetic Waves in Stratified Media Pergamon Press, Oxford 1962

[21] G.N. Watson: The Diffraction of Electromagnetic Waves by the Earth.
Proc.Roy.Soc. 95, 1918-1919, S. 83-99

[22] H. Zuhrt: Elektromagnetische Strahlungsfelder. Springer-Verlag 1953

Herrn Prof. Dr. G. Eckart danke ich sehr für die Anregung zur Behandlung des Themas. Ihm und Herrn Dr. K. D. Becker verdanke ich Unterstützung und wertvolle Hinweise und Ratschläge bei der Abfassung dieser Arbeit. Danken möchte ich auch Herrn Prof. Dr. G. Ulbricht und Herrn Dr. W. Fogy, die es mir ermöglicht haben, diese Arbeit am Institut für Flugfunk und Mikrowellen der Deutschen Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt durchzuführen.

L e b e n s l a u f

Am 23. Januar 1939 wurde ich als Sohn des Ingenieurs Heinrich Glesner und seiner Ehefrau Maria Glesner geb. Kieren in Dillingen/Saar geboren.

Ich besuchte die Volksschule in Saarlouis-Roden und anschließend das Staatliche Humanistische Gymnasium in Saarlouis, wo ich 1959 das Abitur ablegte.

Im Sommersemester 1959 begann ich das Studium der Physik an der Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität des Saarlandes. Die Diplom-Vorprüfung bestand ich im Sommersemester 1961. Meine Diplom-Arbeit über "Strahlungskopplung bei Wendelantennen" führte ich im Institut für Angewandte Physik und Elektrotechnik durch. Im Wintersemester 1964/65 bestand ich die Diplom-Hauptprüfung (17. März 1965).

Seit 1. Mai 1965 bin ich als wissenschaftlicher Mitarbeiter im Institut für Mikrowellen und Flugfunk der Deutschen Versuchsanstalt für Luft- und Raumfahrt in Oberpfaffenhofen/Obb. tätig.

Bönecke-Druck – Clausthal-Zellerfeld 29